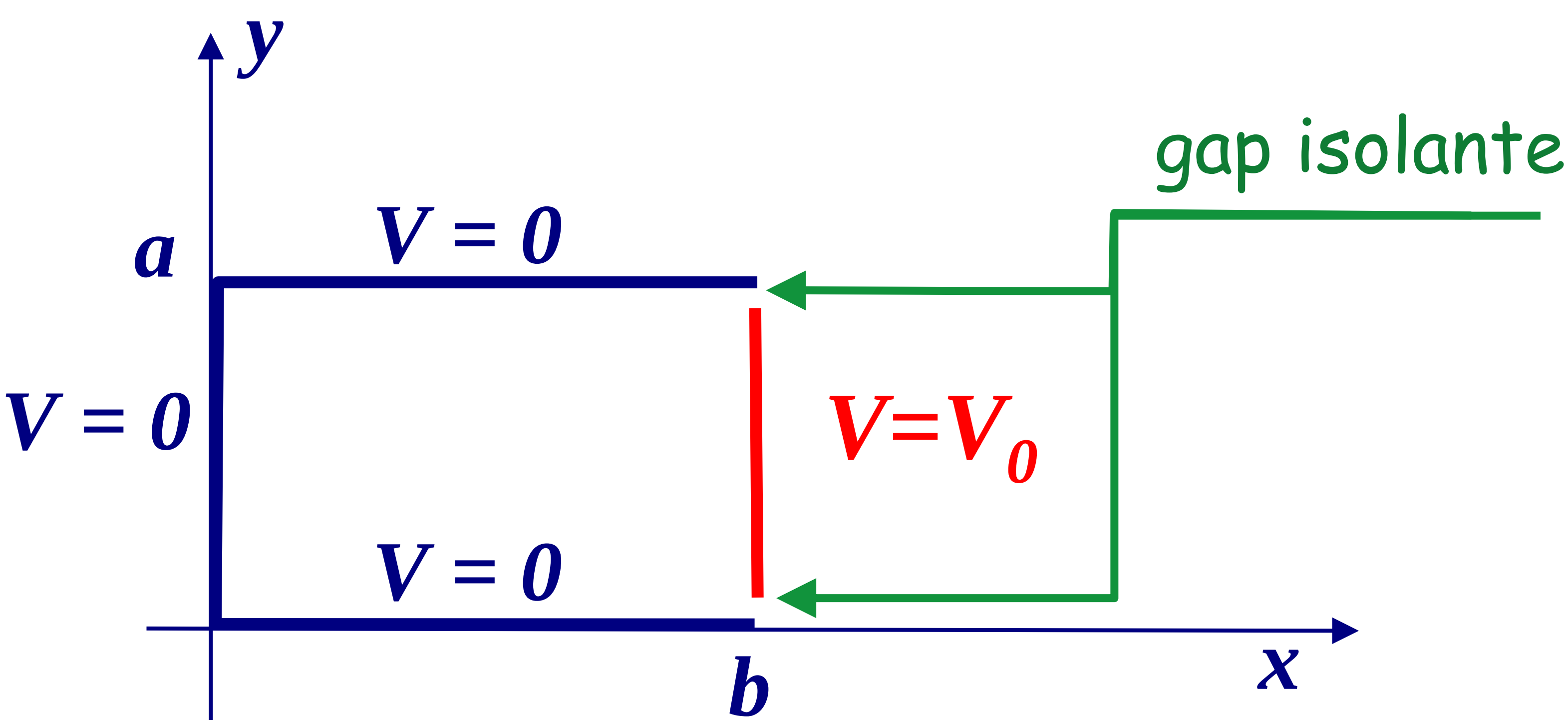
METODI ANALITICI DI SOLUZIONE DELLA EQUAZIONE DI LAPLACE

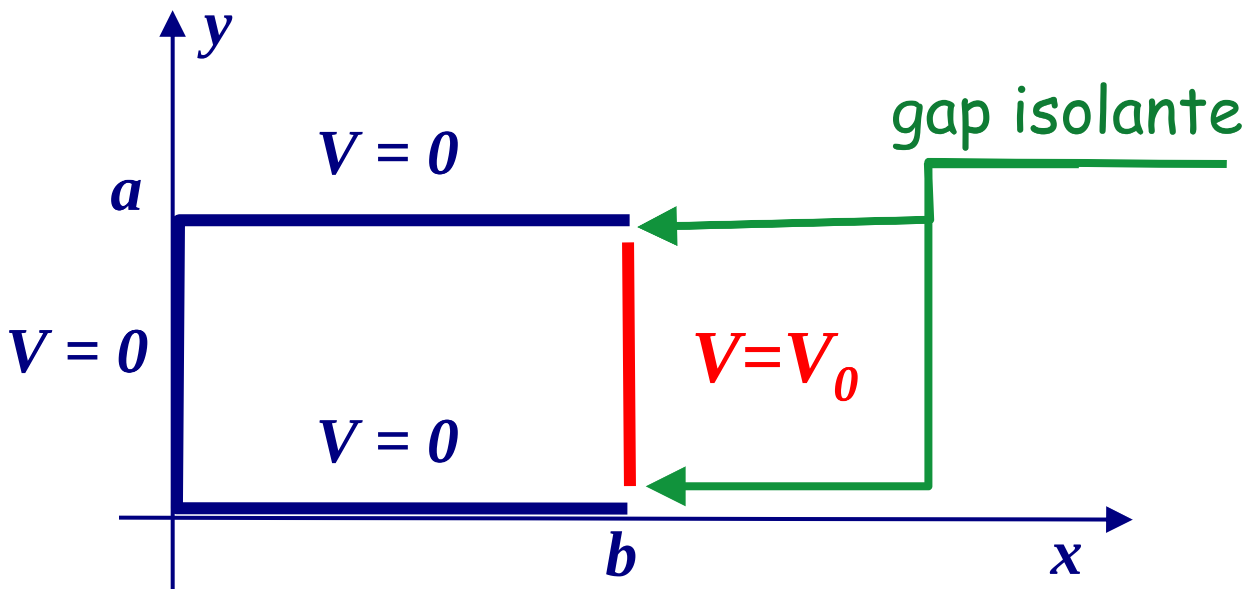
Metodo della separazione delle variabili

Si presta alla soluzione di poblemi di Laplace bi e tridimensionali in geometria cartesiana, cilindrica e sferica.

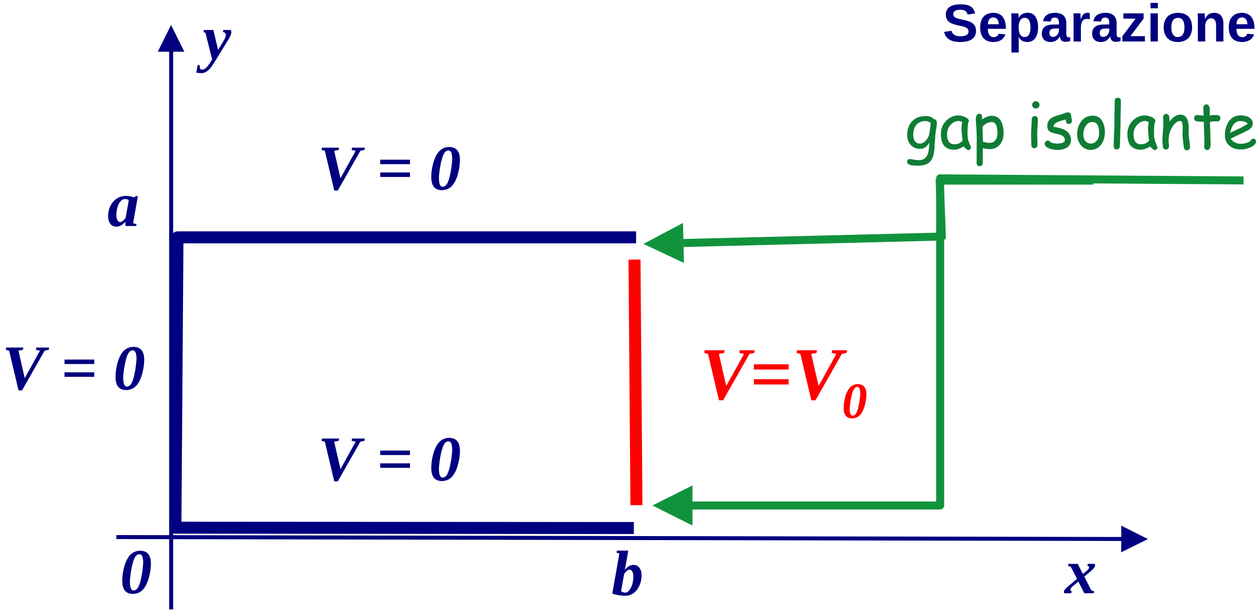
Condotto a sezione rettangolare di lunghezza infinita lungo z



Il problema è descritto da una equazione di Laplace bidimensionale



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



e da un opportuno set di condizioni al contorno

$$V(x,y)=0 \quad 0\le x\le b,\, y=0$$

$$V(x,y)=0 \quad x=0,\, 0\le y\le a$$

$$V(x,y)=0 \quad 0\le x\le b,\, y=a$$

$$V(x,y)=V_0 \quad x=b,\, 0<y<a$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $V(x,y)=X(x)Y(y)$

L'equazione di Laplace $\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$

allora diventa $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$

dividendo per *XY* $\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$ **ovvero** $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$

affinché *X(x)*=*Y(y)*, per ogni scelta *(x,y)*

↓

***X(x)* e *Y(y)* separatamente uguali ad una costante (di separazione) λ**

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \qquad (1)$$

La soluzione della (1) equivale a quella del sistema di equazioni

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$$X'' - \lambda X = 0$$
$$Y'' + \lambda Y = 0 \qquad (2)$$

L'unica possibilità è che risulti λ>0: poniamo quindi $\lambda = \beta^2$

La soluzione del sistema (2) sarà:

$$X'' - \beta^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$$

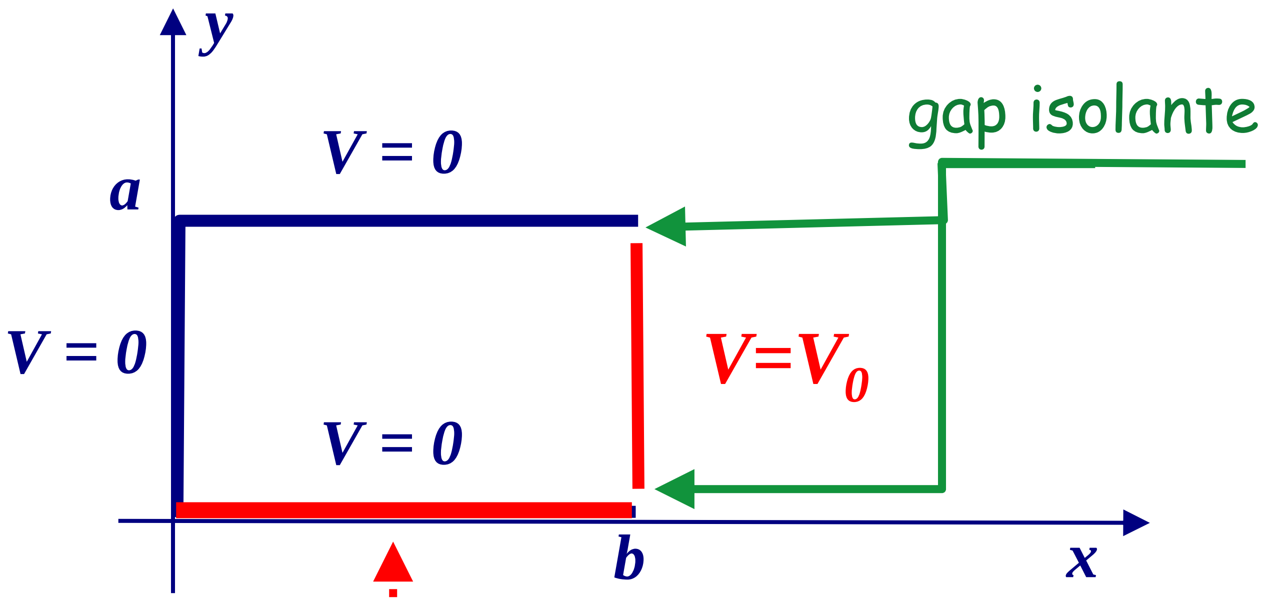
$$Y'' + \beta^2 Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C\cos\beta y + D\sin\beta y$$

Il potenziale sarà esprimibile come:

$$V(x,y) = X(x)Y(y) = \left(Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}\right)\left(C\cos\beta y + D\sin\beta y\right)$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni al contorno

Prima condizione

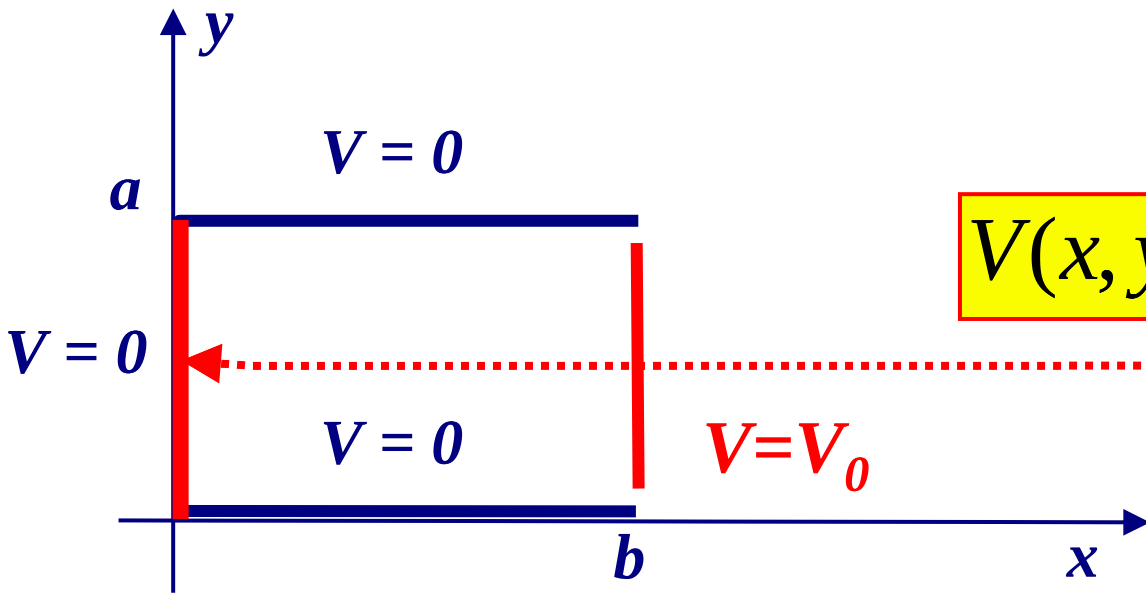


$$V(x,y)=0 \quad 0\le x\le b, y=0$$

$$V(x,y)=\left(Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}\right)\left(C\cos\beta y+D\sin\beta y\right)\Big|_{\forall x\in[0,b],y=0}=0$$

$$\boxed{C = 0}$$

Seconda condizione

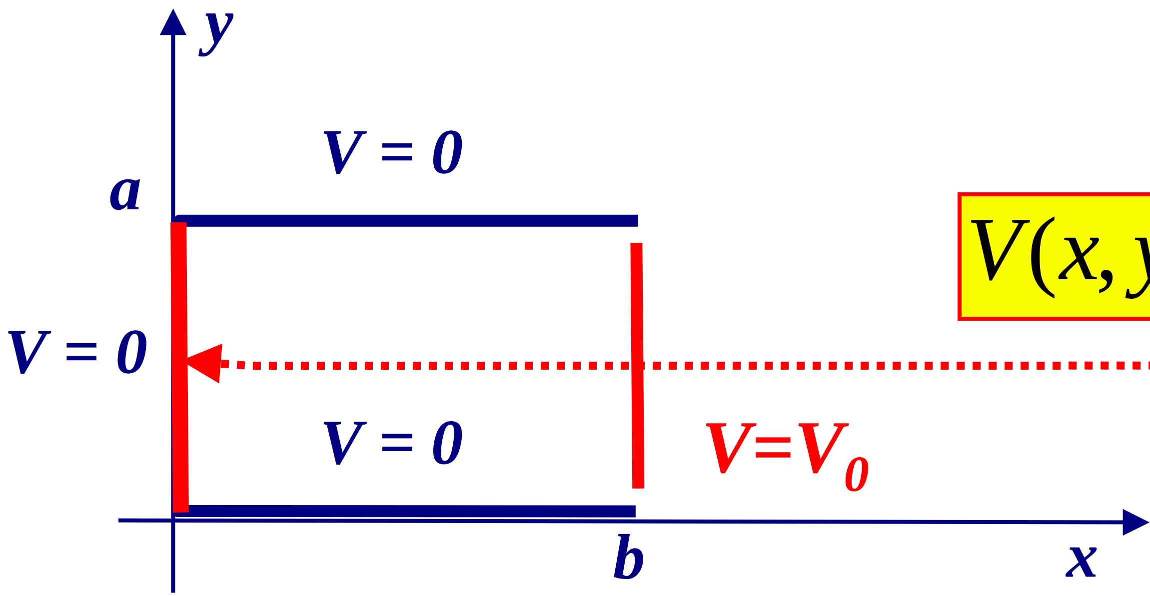


$$V(x,y)=0 \quad 0\le y\le a, x=0$$

$$V(x,y)=\left(Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}\right)\left(D\sin\beta y\right)\Big|_{x=0,\forall y\in[0,a]}=0$$

$$A+B=0\Rightarrow B=-A$$

Seconda condizione

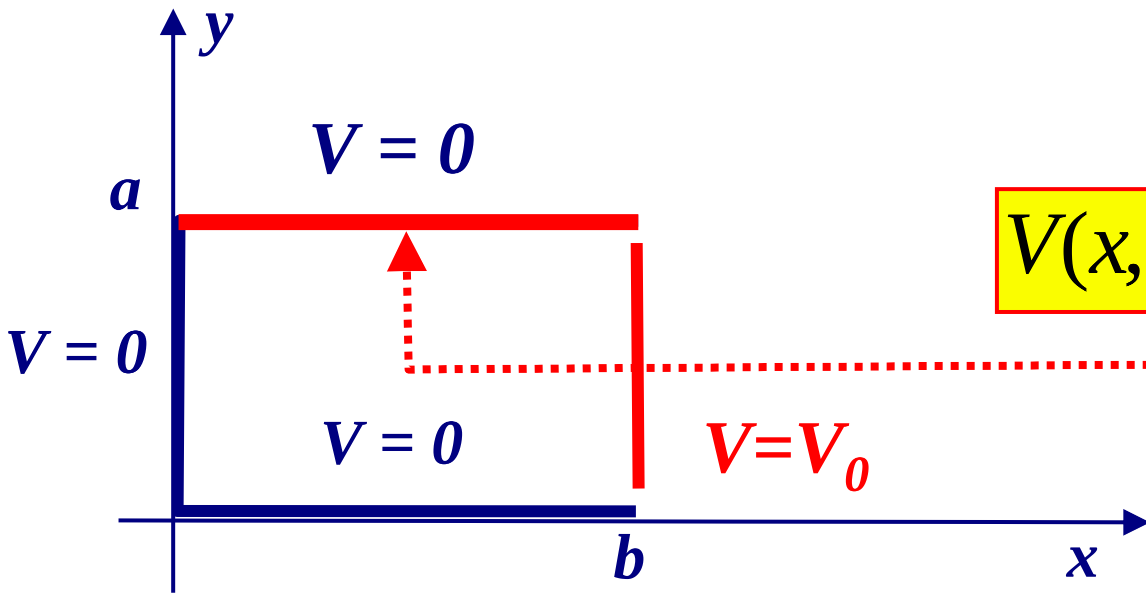


$$\boxed{V(x,y)=0 \quad 0\le y\le a, x=0}$$

e quindi posto *A* = 2AD*

$$\boxed{V(x,y)=A\left(e^{\beta x}-e^{-\beta x}\right)\left(D\sin\beta y\right)=A^{*}\sinh\beta x\cdot\sin\beta x}$$

Terza condizione



$$V(x,y)=0 \quad 0\leq x\leq b, y=a$$

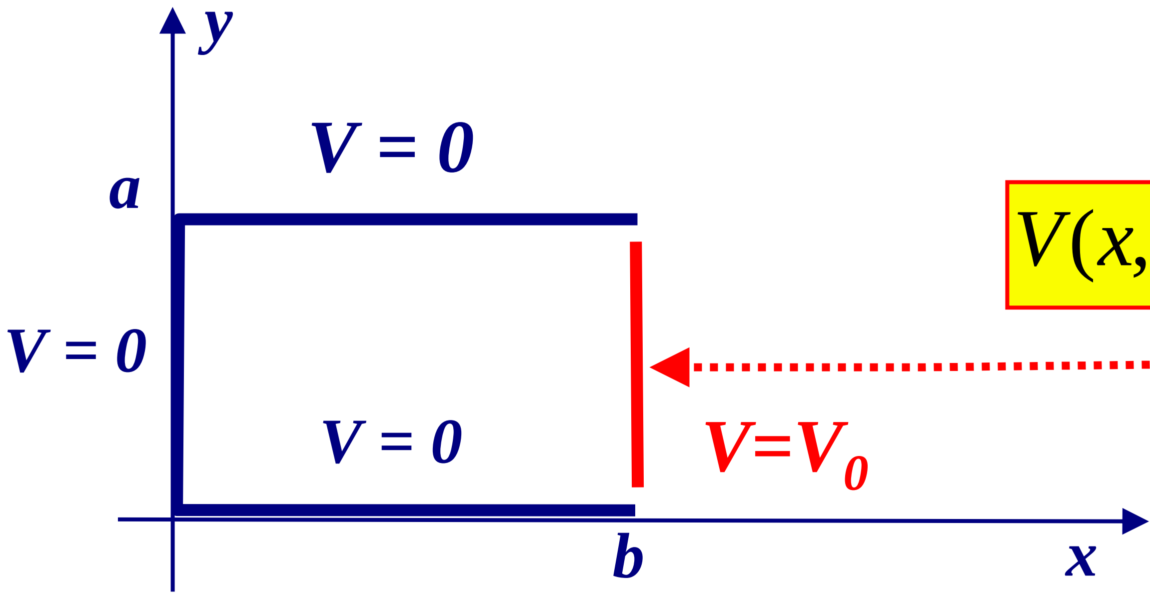
$$V(x,y)=A^{*}\sinh\beta x\cdot\sin\beta y\Big|_{\forall x\in[0,b],y=a}=0\Rightarrow\beta=\frac{n\pi}{a},n=1,2,\ldots$$

$n\neq 0$ poichè $\beta\neq 0$

La soluzione banale A*=0 è esclusa

I valori calcolati di β vengono detti autovalori e le funzioni corrispondenti autofunzioni

$$V_n(x,y) = A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y$$



$$V(x,y)=V_0 \quad 0<y<a, x=b$$

$$V(x,y)=A^* \sinh\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y\bigg|_{x=b,\forall y\in[0,a],}=V_0 \qquad \forall y\in\,]0,a[$$

Siamo riusciti a soddisfare tre delle quattro condizioni al contorno

Per la linearità della equazione di Laplace si può applicare la sovrapposizione degli effetti: se le autofunzioni sono soluzioni della eq. di Laplace, risulterà soluzione anche la combinazione lineare

$$V(x,y) = c_1 V_1(x,y) + c_2 V_2(x,y) + \ldots + c_n V_n(x,y)$$

con c_1, c_2, c_n costanti arbitrarie

Si può ricercare una soluzione del tipo:

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y$$

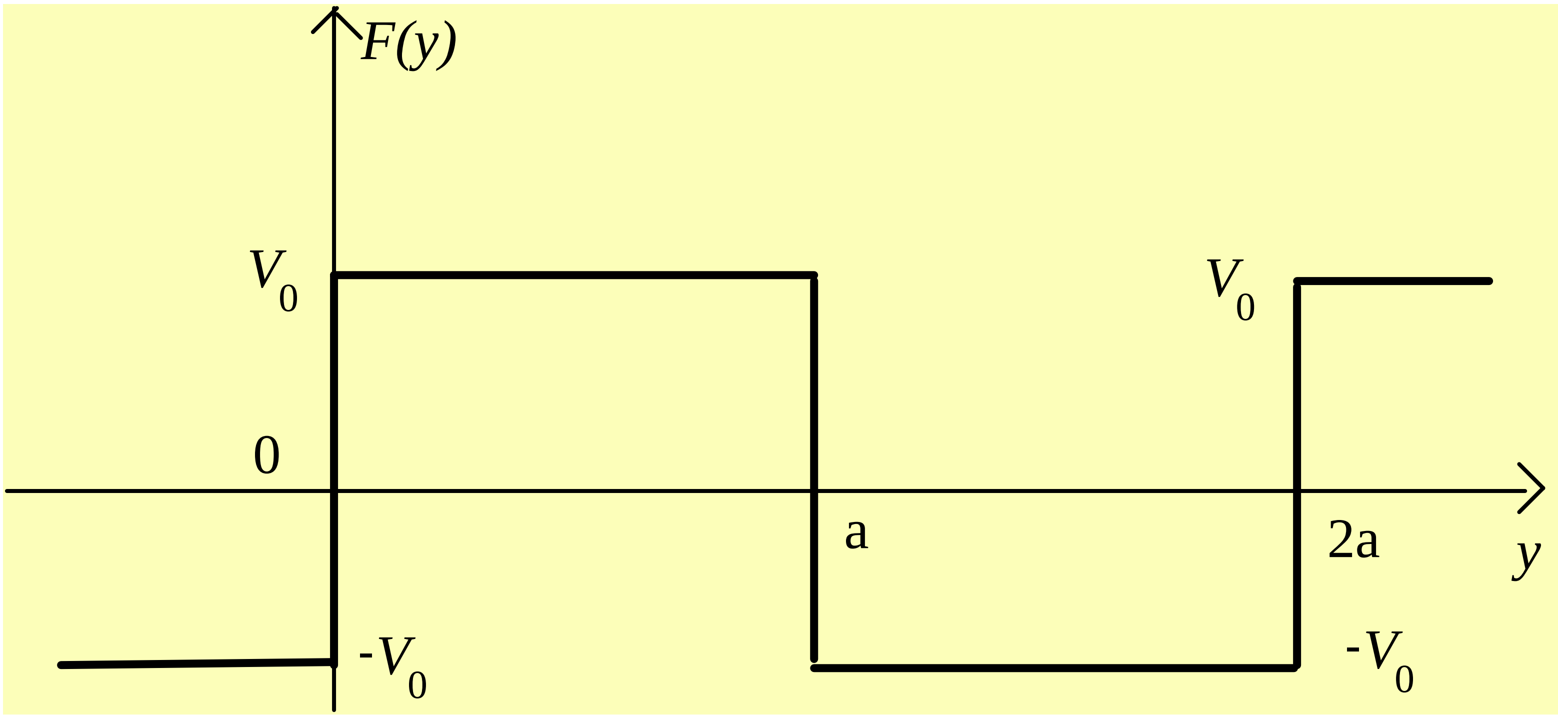
le costanti c_n e A^*_n da determinare sulla base della condizione al contorno:

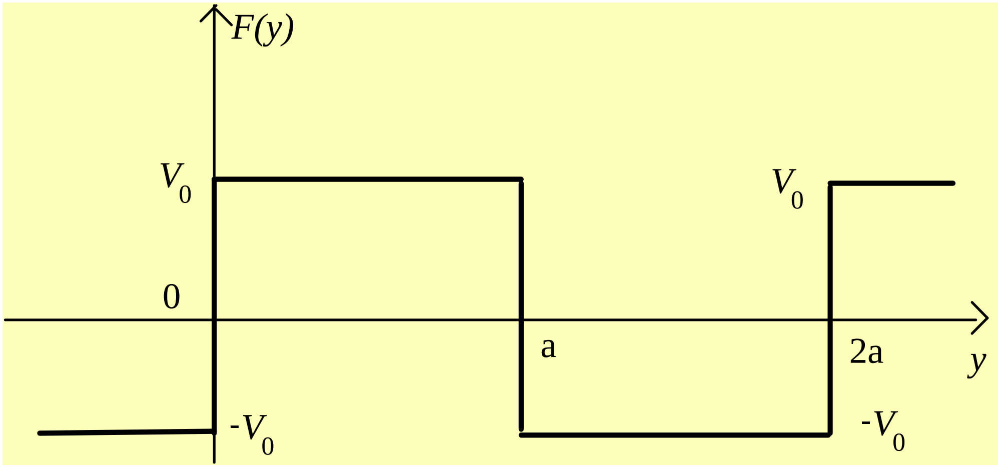
$$V(x,y)=V_0 \qquad 0<y<a, x=b$$

Si ha:

$$V(x=b,y)=V_0=\sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh\frac{n\pi}{a}b\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione di ampiezza V_0 e periodo 2a





La funzione dispari e con simmetria a mezz'onda ammette uno sviluppo di sole funzioni seno di ordine dispari:

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin(n\frac{2\pi}{T})y \quad n\, dispari,\, T=2a$$

$$F(y)=V_0 \quad \forall y\in \left]0,a\right[$$

e con

$$\gamma_n=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{n\pi}; n=dispari\\ 0; n=pari\end{cases}$$

Confrontando

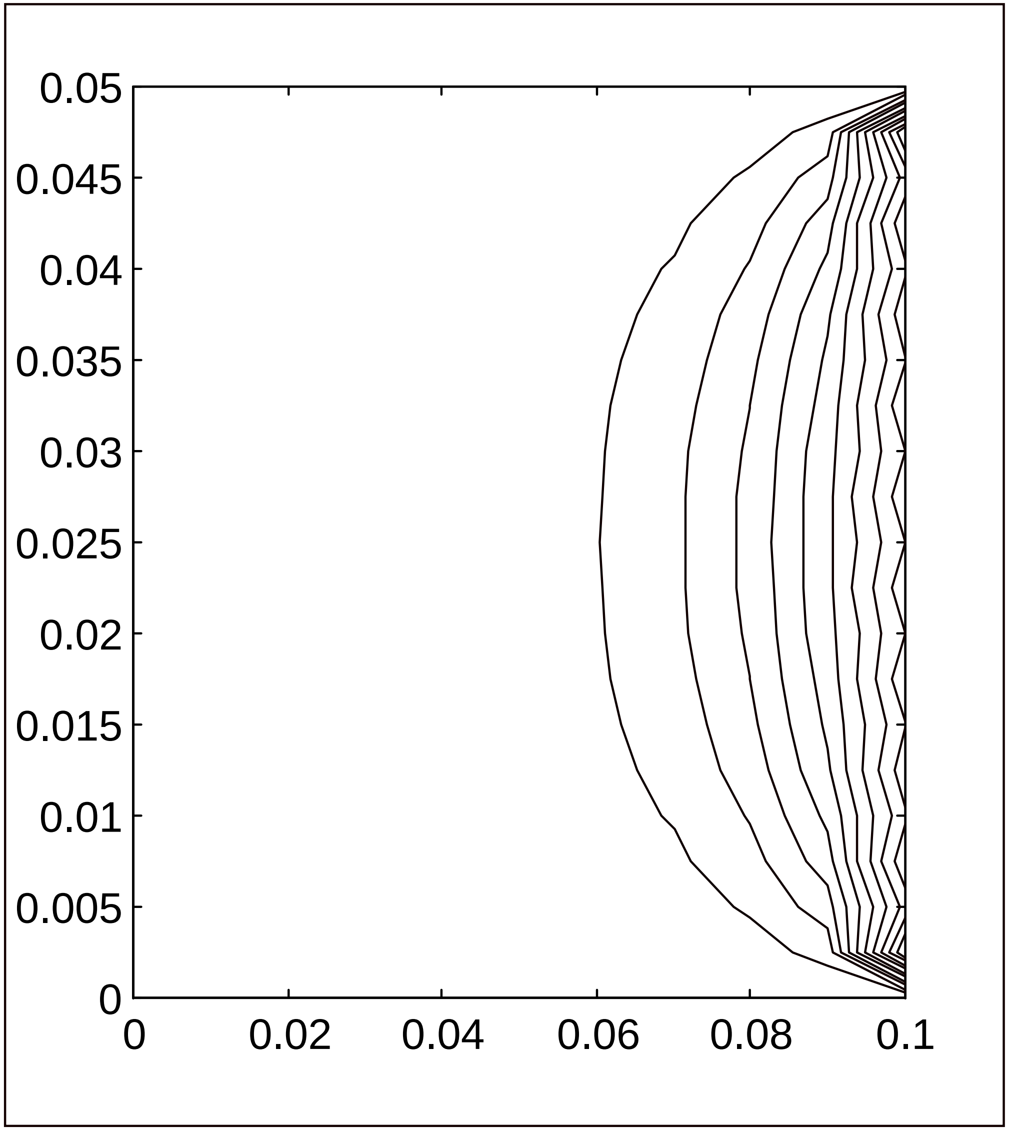
$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y$$

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(n\frac{2\pi}{T})y$$

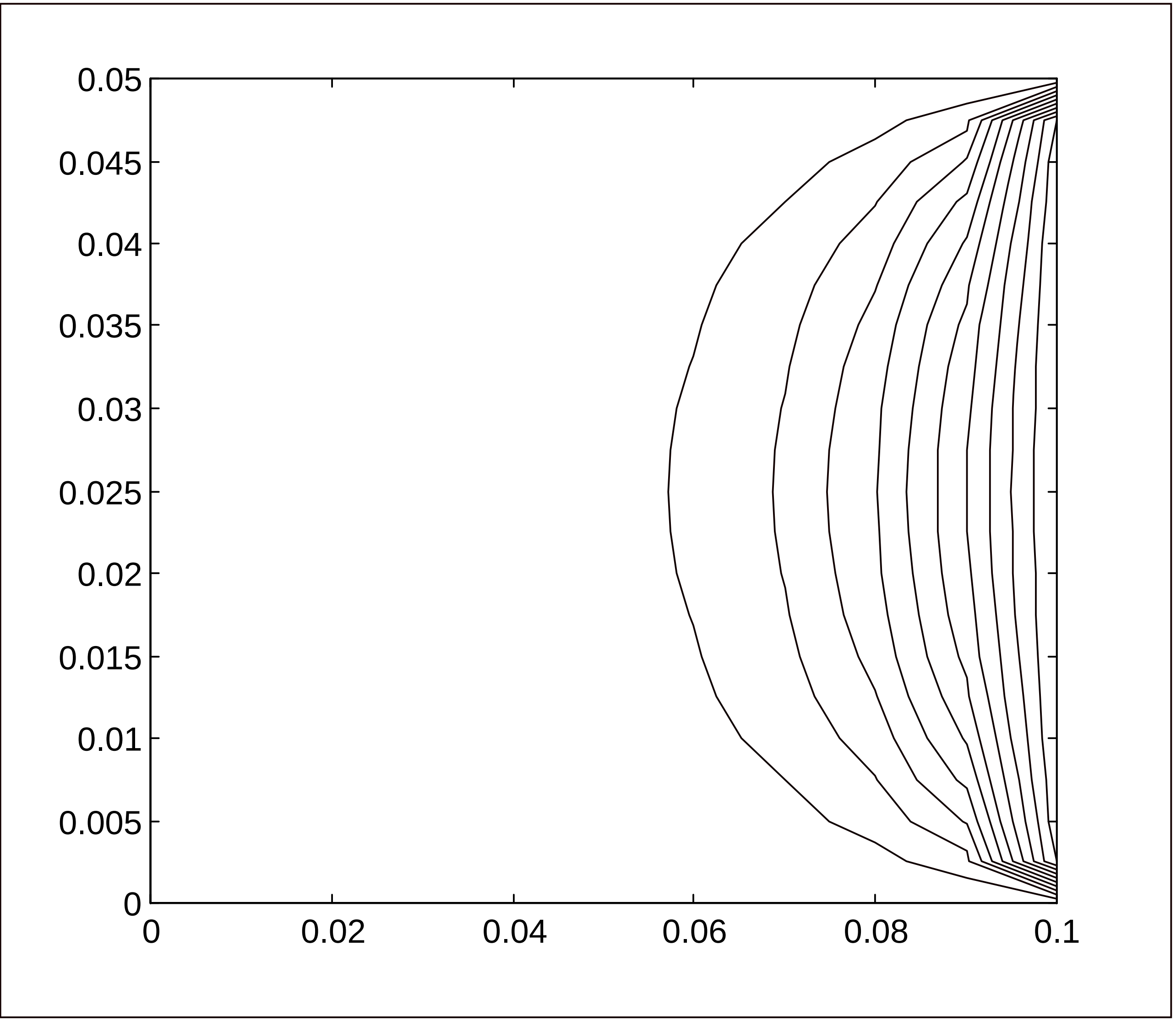
e ponendo $\gamma_n=\dfrac{4V_0}{n\pi}=c_n A_n^* \sinh\dfrac{n\pi}{a}b \quad n\ dispari$

si ottiene la soluzione come somma di infiniti termini

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sinh\frac{n\pi}{a}b}\sinh\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y \quad n\ dispari$$



N. armoniche = 10;
N. sudd. su asse x =10;
N. sudd. su asse y =20;
V_0=100V.



N.armoniche=20;
N. sudd. su asse x=10;
N. sudd. su asse y=20;
V_0=100V.