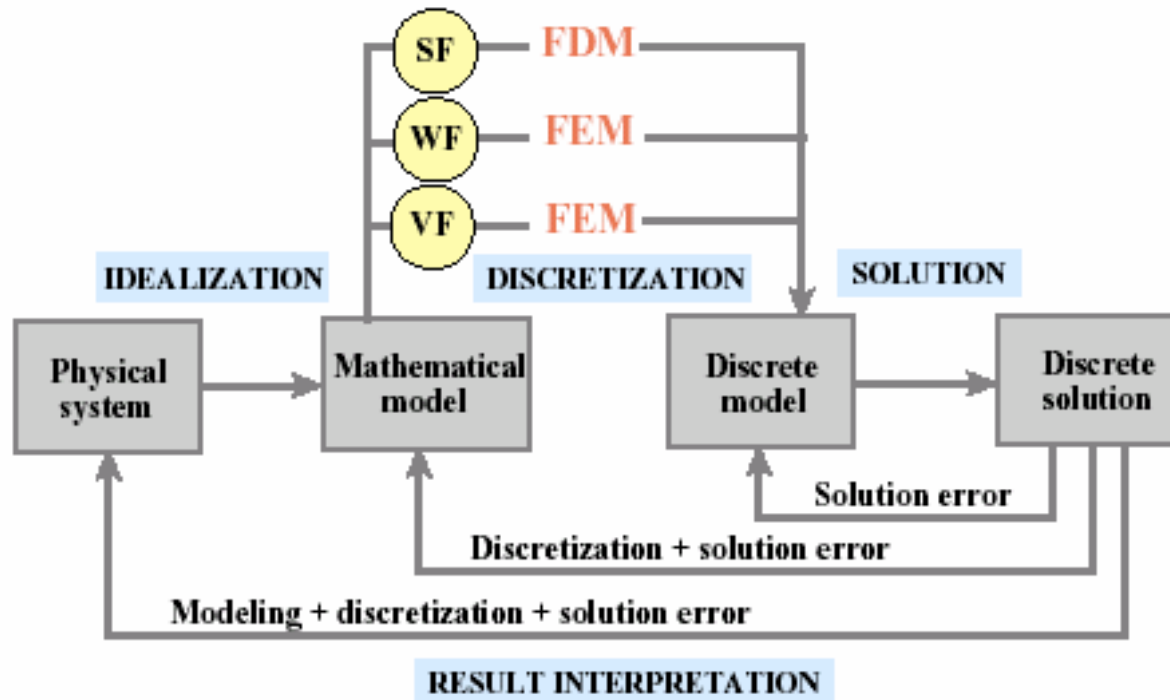


# Soluzioni numeriche di problemi di campo

Il processo di analisi numerica può essere in tre passi principali: idealizzazione, discretizzazione e soluzione.

Il processo di modellazione conduce al modello matematico del sistema fisico. Questo può essere affrontato mediante tre possibili approcci: Strong Form (SF), Weak Form (WF) and Variational Form (VF).



# Forma forte

Consideriamo una funzione  $y=y(x)$  che soddisfa l'equazione differenziale ordinaria:

$$y'' = y + 2 \quad \text{in } [0,2]$$

Questa rappresenta una forma forte (SF) in quanto deve essere soddisfatta per ogni  $x$  appartenente all'intervallo di definizione. Per calcolare la soluzione abbiamo bisogno di conoscere:

$$y(0) = 1$$

$$y(2) = 4$$

Problema con condizioni al contorno (BVP)

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

Problema con condizioni iniziali (IVP)



# Forma debole

In alternativa, possiamo introdurre il residuo:

$$r(x) = y'' - y - 2$$

La SF è quella per la quale:

$$r(x) = 0 \quad \forall x \in [0,2]$$

La condizione al contorno per il residuo risulta:

$$r_0 = x(0) - 1 \quad r_2 = x(2) - 4$$

Ora moltiplichiamo il residuo per una opportuna funzione peso  $w(x)$  in tutto il dominio compreso il contorno ed integriamo all'interno del dominio:

$$\int_0^2 r(x)w(x)dx + r_0w_0 + r_2w_2 = 0$$

Si tratta di una forma integrale pesata (WF)



# Forma variazionale

Si parla di forma debole in quanto soddisfa la ODE di partenza in senso “medio” in tutto il dominio.

Se le funzioni peso sono espresse come variazioni di funzioni (funzioni test):

$$w(x) = \delta v(x)$$

$$w(0) = \delta v_0$$

$$w(2) = \delta v_2$$

Si parla di forma variazionale:

$$\int_0^2 r(x) \delta v(x) dx + r_0 \delta v_0 + r_2 \delta v_2 = 0$$



## Forma forte: metodo delle differenze finite

Si presta alla soluzione di problemi di Laplace bi e tridimensionali in geometria cartesiana, cilindrica e sferica.

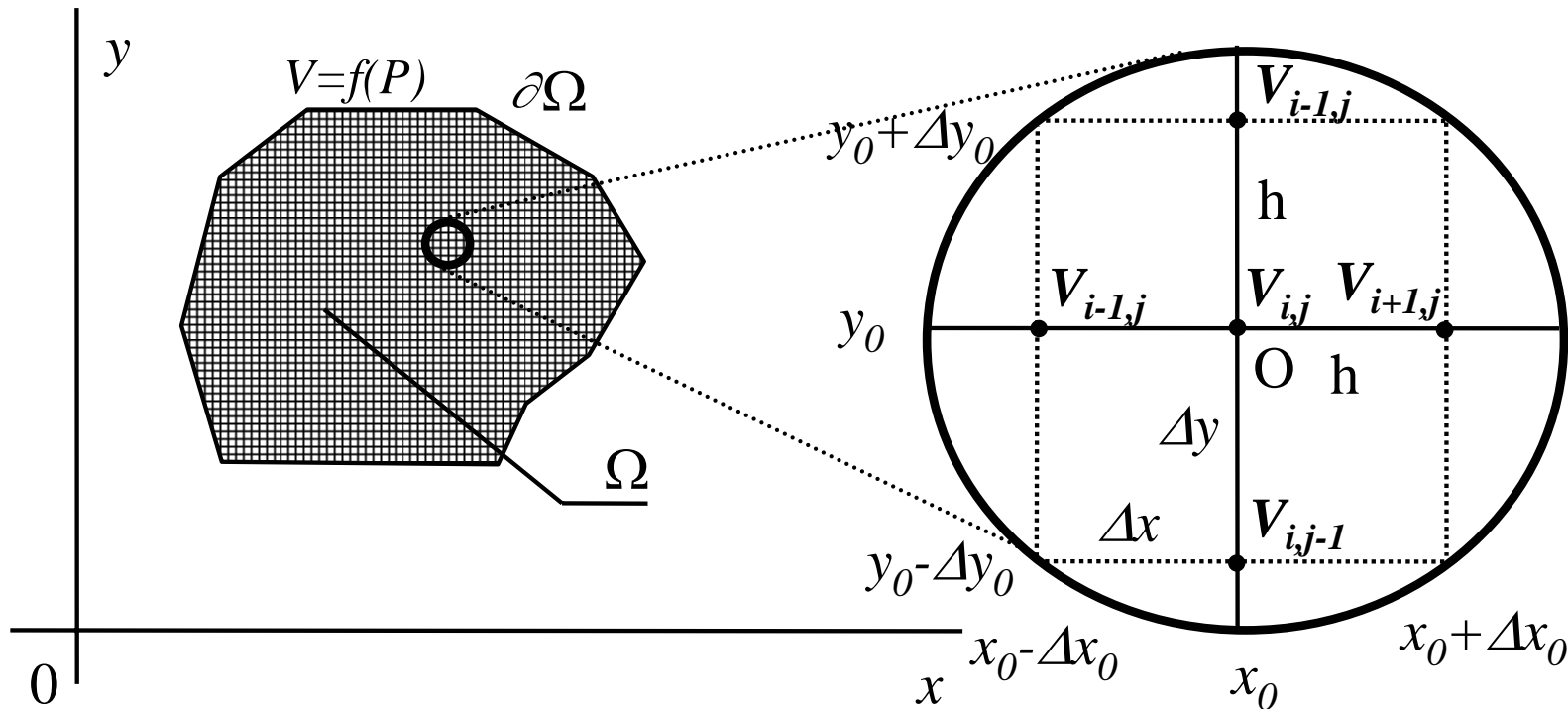
$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \forall P \in \Omega$$

Le condizioni al contorno possono essere date:

- sul potenziale (condizione di Dirichelet),
- sulla derivata normale (condizione di Neumann)
- su entrambe (condizione di tipo misto).

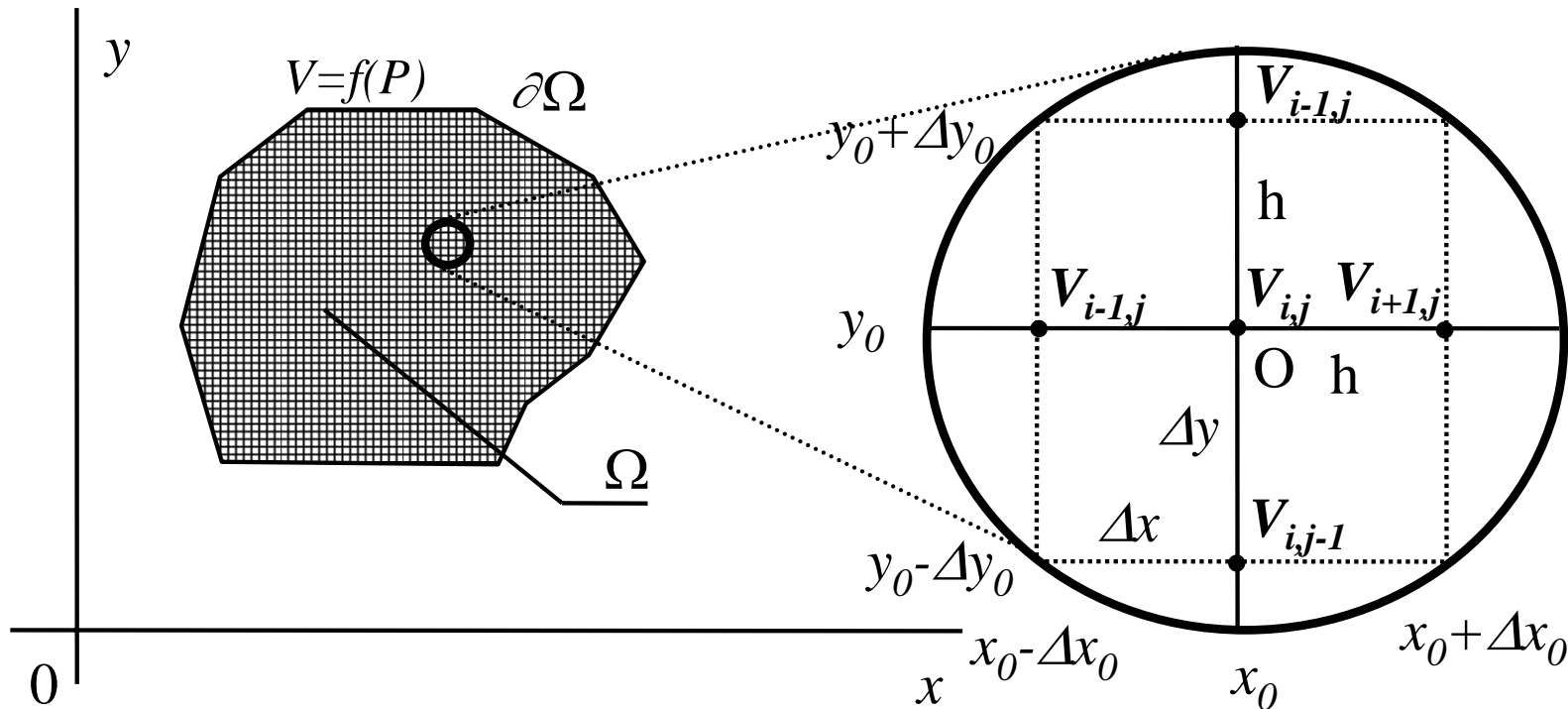


Il primo passo è quello della discretizzazione del dominio: la superficie (in 2D) viene ricoperta mediante un reticolo possibilmente regolare caratterizzato da un passo  $h$ .



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \forall P \in \Omega$$

$$V = f(P) \quad \forall P \in \partial\Omega$$



Il potenziale nell'intorno del punto  $O$  può essere ottenuto attraverso uno sviluppo in serie di Taylor.

$$V(x_0 + \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x^2 + \dots$$

$$V(x_0, y_0 + \Delta y) = V(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta y^2 + \dots$$

$$V(x_0 - \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta x^2 + \dots$$

$$V(x_0, y_0 - \Delta y) = V(x_0, y_0) - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta y + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \Delta y^2 + \dots$$



Sommando ed osservando che  $\Delta x = \Delta y = h$  si ottiene (si trascurano i termini di ordine superiore dello sviluppo):

$$V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h) \cong \\ \cong 4V(x_0, y_0) + h^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_0 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_0 \right)$$

La quantità in parentesi è nulla per ipotesi dovendo soddisfare l'equazione di Laplace nel dominio  $\Omega$

$$V(x_0, y_0) \cong \frac{1}{4} [V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h)]$$

Espressione approssimata (forma discreta del teorema della media) del potenziale del punto O in funzione del potenziale dei punti circostanti.

## Per un problema di Poisson

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

l'espressione approssimata del potenziale sarà:

$$V(x_0, y_0) \cong \frac{1}{4} \left[ V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h) + \frac{h^2 \rho_0}{\varepsilon} \right]$$

## Formulazioni idonee al trattamento numerico

$$V(x_0, y_0) \cong \frac{1}{4} [V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h)]$$

La forma discretizzata sarà

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [V(i+1, j) + V(i, j+1) + V(i-1, j) + V(i, j-1)]$$

Per risolvere questa equazione è possibile utilizzare varie metodologie numeriche.



## Sistema diretto

In tale metodo il potenziale dei nodi interni viene calcolato risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{AV} = \mathbf{B}$$

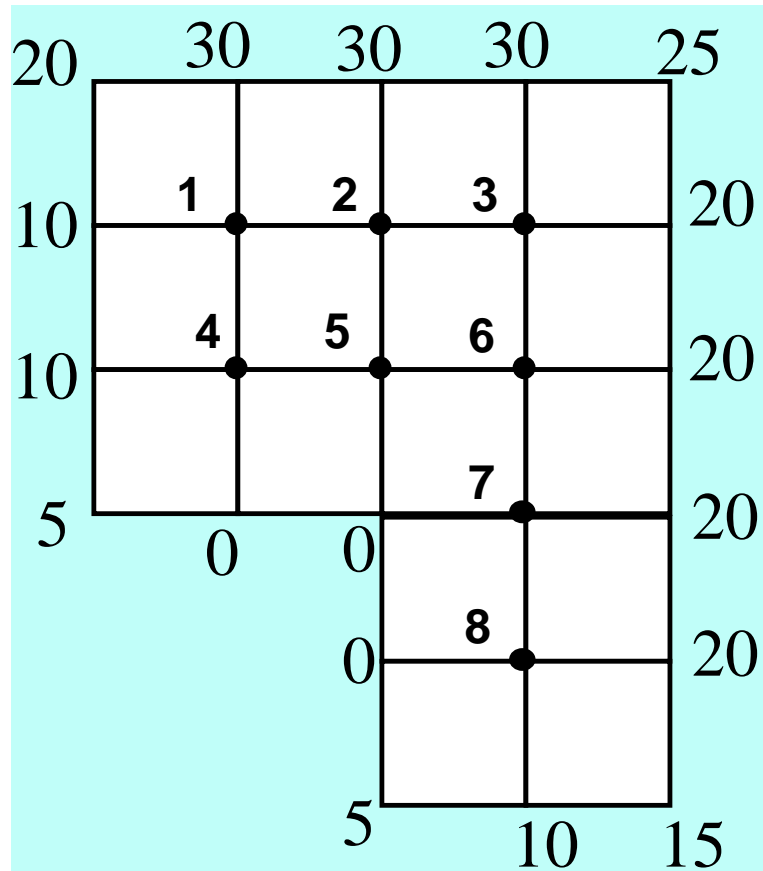
**V** vettore colonna dei potenziali incogniti dei nodi interni

**B** vettore colonna dei potenziali noti

**A** matrice di coefficienti (sparsa e di tipo a banda)



## Metodo diretto - esempio



$$V_1 = \frac{1}{4} [V_2 + V_4 + 10 + 30] \Rightarrow -4V_1 + V_2 + V_4 = -40$$

$$V_2 = \frac{1}{4} [V_1 + V_3 + V_5 + 30] \Rightarrow V_1 - 4V_2 + V_3 + V_5 = -30$$

$$V_k = \dots$$

$$V_8 = \frac{1}{4} [V_7 + 0 + 10 + 20] \Rightarrow V_7 - 4V_8 = -30$$

## metodo diretto - esempio

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -30 \\ -50 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

**matrice A  
sparsa,  
bandata  
e simmetrica**

**A può essere considerata una **matrice di incidenza** del tipo di quella incontrata nello studio dei circuiti.**



## metodo diretto

La soluzione del sistema si può quindi ottenere per inversione diretta:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Le caratteristiche di  $\mathbf{A}$  consentono una inversione non onerosa fino a quando le dimensioni del sistema da invertire non diventano eccessive.



# Metodo iterativo

Inizialmente al potenziale di tutti i nodi interni, opportunamente ordinati, sia assegnato un valore di tentativo, ad es. pari a zero.

Il potenziale di tutti i nodi interni si calcola applicando la:

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [V(i+1, j) + V(i, j+1) + V(i-1, j) + V(i, j-1)]$$

Si ottiene così una prima stima approssimata del potenziale.

Si procede quindi ad iterazioni successive che forniranno stime sempre più accurate del potenziale.



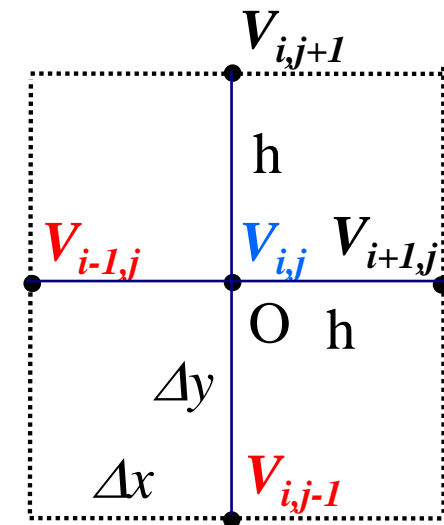


## metodo iterativo

Per accelerare la procedura, al passo k-esimo, si possono utilizzare i valori del potenziale dei nodi circostanti (già aggiornati al passo k).

Se la matrice dei potenziali viene aggiornata fissando l'indice di riga e variando quello di colonna si ha:

$$V_{i,j}^k = \frac{1}{4} [V_{i+1,j}^{k-1} + V_{i,j+1}^{k-1} + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k]$$



## metodo iterativo

**Criterio di fine procedura di calcolo:**

$$V_{i,j}^n - V_{i,j}^{n-1} \leq \varepsilon$$

**La convergenza della procedura alla soluzione risulta dipendente anche dalla "bontà" della assegnazione iniziale del potenziale dei nodi interni.**



# Metodo del rilassamento

Si tratta di un metodo di tipo iterativo. Inizialmente al potenziale di tutti i nodi interni è assegnato un valore di tentativo, ad esempio pari a zero.

La stima della bontà della valutazione del potenziale al (k+1)-esimo passo della procedura viene effettuata valutando il cosiddetto residuo del nodo

$$R_{i,j}^{k+1} = \alpha \cdot \left[ V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k - 4V_{i,j}^k \right]$$



# Metodo del rilassamento

$$R_{i,j}^{k+1} = \alpha \cdot \left[ V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k - 4V_{i,j}^k \right]$$

$\alpha$  è detto fattore di rilassamento, in generale maggiore di 1.

Il potenziale di ogni nodo viene modificato riducendo a zero il residuo corrispondente (processo di rilassamento).



## metodo di rilassamento

**La procedura termina quando tutti i residui sono nulli o quando il residuo massimo risulta inferiore ad un  $\varepsilon$  prefissato.**

**La convergenza della procedura alla soluzione dipende dalla "bontà" della assegnazione iniziale del potenziale e dalla scelta ottimale del fattore di rilassamento.**

**In tutti i casi si può far seguire alla fase di elaborazione numerica una di post-processing grafica.**

