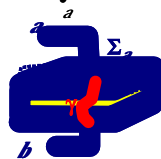
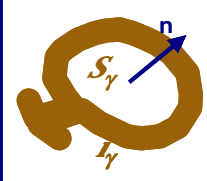



Soluzione di problemi di campo: equazioni di Laplace e Poisson

I modelli statici e quasi statici sono particolarmente importanti perchè consentono di ricavare le caratteristiche di componenti fondamentali, quali resistenza, capacità, induttanza.

Condensatore	Induttore	Resistore
$\mathbf{E} \neq 0 \quad \mathbf{B} \rightarrow 0$ $C = \frac{\iint_{\Sigma_a} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl}$ 	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \rightarrow 0$ $L = \frac{\iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds}{i_\gamma}$ 	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \neq 0$ $R = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds}$ 

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Equazioni di Laplace e Poisson

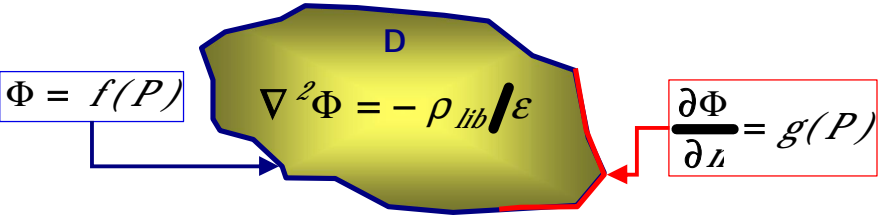
La distribuzione dei campi può essere ottenuta in termini di funzioni potenziali (scalari o vettoriali)

Elettrostatica	Campo statico di corrente (in assenza di campo impresso)	Magnetostatica (in domini monoconnessi in cui $\mathbf{J}=\mathbf{0}$)
$\begin{cases} \text{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{div} \mathbf{J}_{lib} = 0 \\ \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{J}_{lib} = \sigma \mathbf{E} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{div} \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{H} = -\nabla \Psi_H \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$
$\nabla^2 \Phi = -\rho_{lib} / \varepsilon$	$\nabla^2 \Phi = 0$	$\nabla^2 \Psi_H = 0$

In un dominio D, la soluzione di campo è unica se si assegnano i valori del potenziale sulla frontiera di D (**Dirichlet**) o i valori della derivata normale (**Neumann**).

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno





$\Phi = f(P)$ $\nabla^2 \Phi = -\rho_{lib} / \epsilon$ $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = g(P)$


In un dominio D la soluzione del problema di Laplace/Poisson è **unica** se sulla frontiera di D si assegnano:

- i valori del potenziale (condizioni al contorno tipo **Dirichlet**);
- i valori della derivata normale (condizioni al contorno tipo **Neumann**);
- condizioni miste

La **soluzione** del problema di Laplace/Poisson può essere calcolata per via **analitica** solo per configurazioni semplici (simmetria).

Nei casi di maggiore complessità si ricorre a **metodi numerici** (differenze finite, elementi finiti, momenti, ...).

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Equazioni di Laplace e Poisson

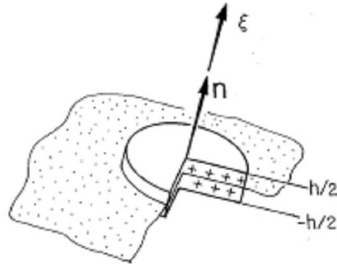
In molti casi il sistema in esame presenta più materiali (domini) sui quali vanno imposte opportune condizioni di raccordo.

Queste si ottengono dall'applicazione delle leggi integrali riguardanti circuitazioni e flussi.

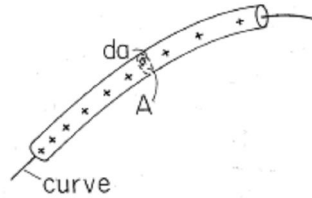
Risulta importante conoscere se sono presenti eventuali **sorgenti di tipo "singolare"** sulle superfici di separazione.



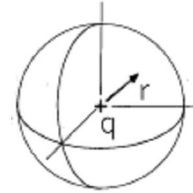
Distribuzioni singolari di carica



$$\sigma_s = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, d\xi$$



$$\lambda = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ A \rightarrow 0}} \int_A \rho \, da$$

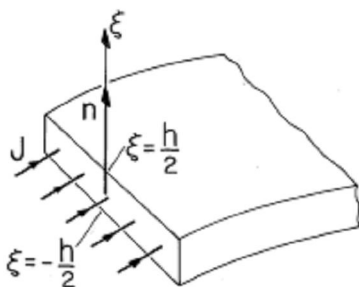


$$q = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ V \rightarrow 0}} \int_V \rho \, dv$$

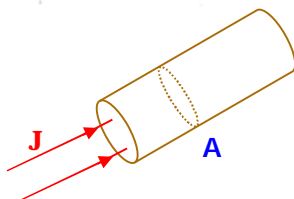
Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Distribuzioni singolari di corrente



$$\mathbf{K} = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{J} \, d\xi$$

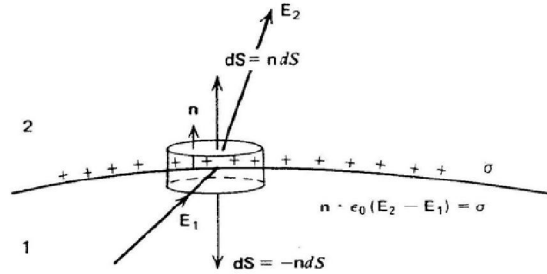


$$i = \lim_{\substack{|\mathbf{J}| \rightarrow \infty \\ A \rightarrow 0}} \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Condizioni di raccordo



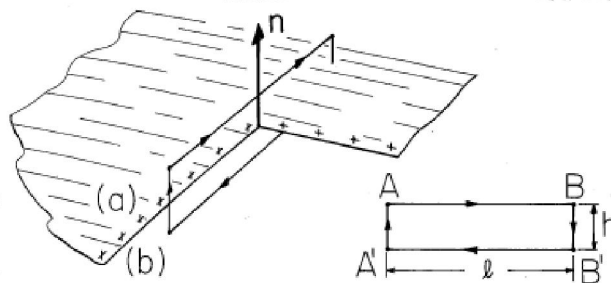
$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{da} = \int_S \sigma_s dS \Rightarrow \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) dS = \sigma_s dS$$

$$\epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_s \Rightarrow \vec{n} \cdot [\epsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = \sigma_s$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Condizioni di raccordo



$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{ds} = (E_{1t} - E_{2t}) dl = 0 \Rightarrow E_{1t} - E_{2t} = 0$$

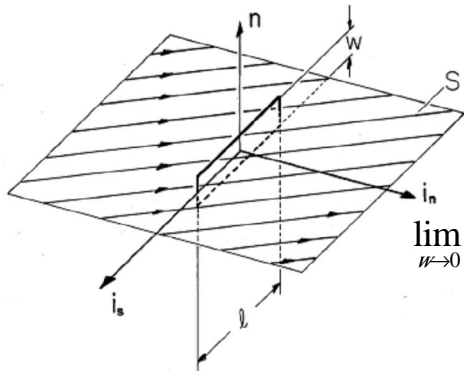
$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

Equivalent to $\Phi_1 = \Phi_2$ along boundary

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Condizioni di raccordo



$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_s dl = \iint_{S_{\gamma}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{i}_n dS$$



$$\lim_{w \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_s dl = l \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{H}^a - \mathbf{H}^b) = l \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{K}$$

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{i}_n \times \mathbf{n}$$

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}^a - \mathbf{H}^b) = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^a - \mathbf{H}^b) = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{K}$$

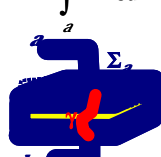
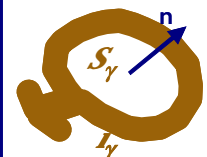

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^a - \mathbf{H}^b) = \mathbf{K}$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Soluzione di problemi di campo: equazioni di Laplace e Poisson

I modelli statici e quasi statici sono particolarmente importanti perchè consentono di ricavare le caratteristiche di componenti fondamentali, quali resistenza, capacità, induttanza.

Condensatore	Induttore	Resistore
$\mathbf{E} \neq 0 \quad \mathbf{B} \rightarrow 0$ $C = \frac{\iint_{\Sigma_a} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}$ 	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \rightarrow 0$ $L = \frac{\iint_{S_{\gamma}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds}{i_{\gamma}}$ 	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \neq 0$ $R = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}$ 

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



In un dominio D la soluzione del problema di Laplace/Poisson è **unica** se sulla frontiera di D si assegnano:

- i valori del potenziale (condizioni al contorno tipo **Dirichlet**);
- i valori della derivata normale (condizioni al contorno tipo **Neumann**);
- condizioni miste

La **soluzione** del problema di Laplace/Poisson può essere calcolata per via **analitica** solo per configurazioni semplici (simmetria).

Nei casi di maggiore complessità si ricorre a **metodi numerici** (differenze finite, elementi finiti, momenti, ...).

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno

Conduzione stazionaria

E' il problema più semplice. Non occorre in generale risolvere il problema esterno dato il rapporto tra le conducibilità dei mezzi

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0$$

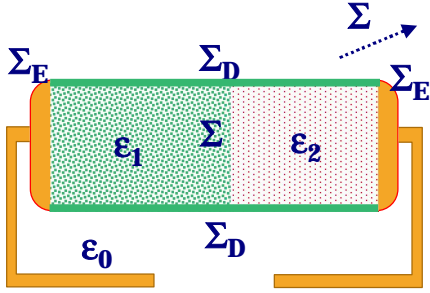
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi|_{\Sigma} = cont \\ \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Sigma} = cont \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi|_{\Sigma_E} = \Phi_E \\ \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Sigma_C} = 0 \end{array} \right.$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno

Elettrostatica


Occorre in generale risolvere il problema esterno dato il rapporto tra le permittività dei mezzi



$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = -\rho$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi|_{\Sigma} = cont \\ \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Sigma} = cont \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi|_{\Sigma_E} = \Phi_E \\ \epsilon (\partial \Phi / \partial n)|_{\Sigma_D} = D_n \\ \Phi|_{\Sigma_{\infty}} \rightarrow 0 \propto 1/r \end{array} \right.$$

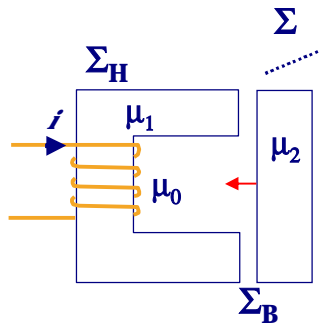


Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno

Motivazioni
Richiami
Formulazioni
Operatori

Formulazioni -11-

Magnetostatica




Sono possibili diverse formulazioni in relazione alla struttura del sistema da studiare:

- Potenziale vettore
- Potenziale ridotto
- Potenziale ridotto-totale

E' il problema più complesso a causa della:

- caratteristica non lineare dei materiali
- rapporto finito tra le permeabilità
- rotazionalità di H



Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno

Equazioni di Laplace e Poisson

In molti casi il sistema in esame presenta più materiali (domini) sui quali vanno imposte opportune condizioni di raccordo.

Queste si ottengono dall'applicazione delle leggi integrali riguardanti circuitazioni e flussi.

Risulta importante conoscere se sono presenti eventuali sorgenti di tipo "singolare" sulle superfici di separazione.

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



In coordinate cartesiane (x, y, z) :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

In coordinate cilindriche (r, φ, z) :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

In coordinate sferiche (r, θ, φ) :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno

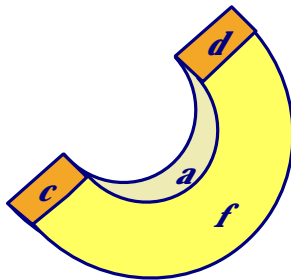


Calcolo di parametri in geometrie monodimensionali

utilizzo della equazione di Laplace

Calcolo della resistenza di una barra metallica di assegnata conducibilità σ .

Approccio in cui sono note le condizioni al contorno sul potenziale



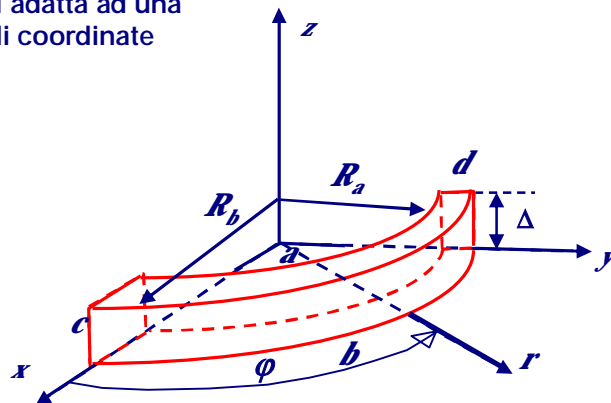
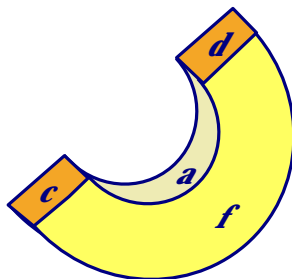
Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Si vuole calcolare la resistenza tra le seguenti coppie di facce quando su di esse siano assegnati i potenziali:

$a - b$, $c - d$, $e - f$

La geometria del sistema si adatta ad una descrizione in un sistema di coordinate cilindriche (r, φ, z) .

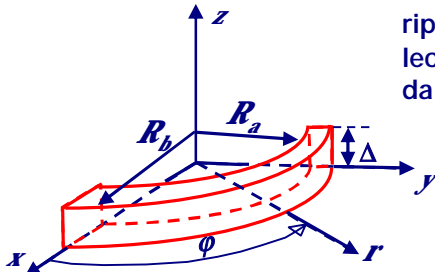


Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Consideriamo inizialmente la resistenza tra la faccia *a* e la faccia *b*.

Le condizioni al contorno sono date sulle superfici coordinate $r = R_a$ e $r = R_b$. Poiché il mezzo è lineare ed il sistema si ripete per piani coordinati a $r = \text{cost}$, è lecito ritenere che il potenziale dipenda solo da r :



$$\forall \varphi, z: \Phi(r = R_a) = 0$$

$$\forall \varphi, z: \Phi(r = R_b) = \Phi_0$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \Phi(r) \rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Poiché la soluzione è per $r > 0$ si ha:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = A \Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\Phi(r) = A \ln r + B \quad \text{Soluzione generale}$$

Le costanti di integrazione A, B vanno calcolate imponendo le condizioni al contorno sulle due superfici coordinate a $r = \text{cost}$

$$\Phi(r = R_a) = 0 \rightarrow B = -A \ln R_a$$

$$\Phi(r = R_b) = \Phi_0 \rightarrow \Phi_0 = A \ln R_b - A \ln R_a \rightarrow A = \frac{\Phi_0}{\ln \frac{R_b}{R_a}}$$

Sostituendo nella soluzione generale si ottiene:

$$\Phi(r) = \frac{\Phi_0}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{r}{R_a}$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Noto l'andamento del potenziale si può calcolare l'andamento del campo elettrico:

$$\Phi(r) = \frac{\Phi_0}{\ln \frac{R_b}{R_a}} \ln \frac{r}{R_a} \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \mathbf{i}_r = -\frac{\Phi_0}{r \ln \frac{R_b}{R_a}} \mathbf{i}_r$$

Noto il campo elettrico si ottiene il vettore densità di corrente:

$$\mathbf{J} = -\frac{\sigma \Phi_0}{r \ln \frac{R_b}{R_a}} \mathbf{i}_r$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



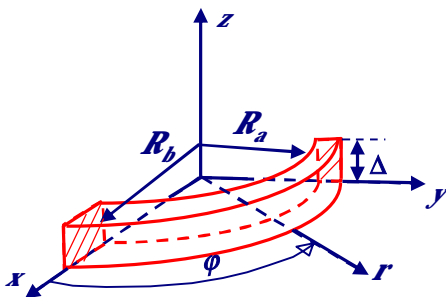
La resistenza risulta pertanto data da:

$$R_{ab} = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds} = \frac{\Phi_0}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}$$

$$\mathbf{n} ds = -\mathbf{i}_r r d\varphi dz$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sigma \Phi_0}{r \ln \frac{R_b}{R_a}} \mathbf{i}_r$$

$$R_{ab} = \frac{\Phi_0}{\int_{z=0}^{z=\Delta} dz \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \frac{\sigma \Phi_0}{r \ln \frac{R_b}{R_a}} r d\varphi}$$



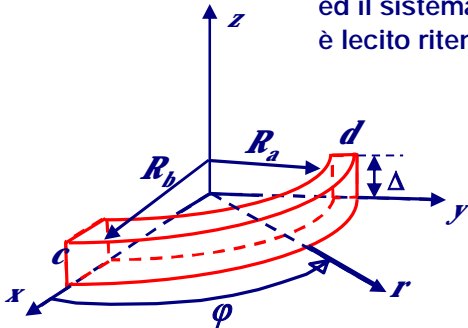
$$R_{ab} = \frac{2 \ln \frac{R_b}{R_a}}{\sigma \pi \Delta}$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Consideriamo ora la resistenza tra la faccia *c* e la faccia *d*

Le condizioni al contorno sono date sulle superfici coordinate $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$ poiché il mezzo è lineare ed il sistema si ripete per piani coordinati a $\varphi = \text{cost.}$, è lecito ritenere che il potenziale dipenda solo da φ



$$\forall r, z: \Phi(\varphi = 0) = \Phi_0$$

$$\forall r, z: \Phi(\varphi = \pi/2) = 0$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \Phi(\varphi) \rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Poiché la soluzione è per $r \neq 0$ si ha:

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right) = A \Rightarrow \Phi = A\varphi + B$$

$$\Phi(\varphi) = A\varphi + B \quad \text{Soluzione generale}$$

Le costanti di integrazione A, B vanno calcolate imponendo le condizioni al contorno sulle due superfici coordinate a $\varphi = \text{cost.}$

$$\Phi(\varphi = 0) = \Phi_0 \rightarrow B = \Phi_0$$

$$\Phi(\varphi = \pi/2) = 0 \rightarrow 0 = A \frac{\pi}{2} + \Phi_0 \rightarrow A = -\frac{2\Phi_0}{\pi}$$

Sostituendo nella soluzione generale si ottiene:

$$\Phi(\varphi) = \Phi_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \varphi \right) \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi(\varphi) = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\varphi} \mathbf{i}_\varphi = \frac{2\Phi_0}{r\pi} \mathbf{i}_\varphi$$

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



La resistenza risulta, pertanto, data da:

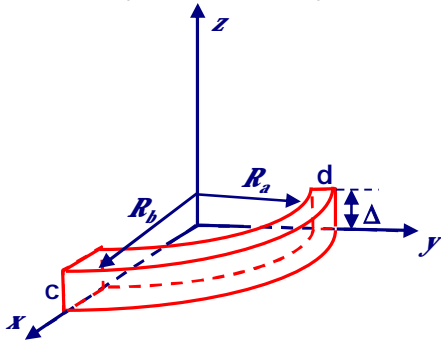
$$R_{cd} = \frac{\int_c^d \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds} = \frac{\Phi_0}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}$$

$$\mathbf{n} ds = \mathbf{i}_\varphi dr dz$$

$$\mathbf{J} = \frac{2\sigma\Phi_0}{l\pi} \mathbf{i}_\varphi$$

$$R_{cd} = \frac{\Phi_0}{\int_{z=0}^{z=\Delta} dz \int_{r=R_a}^{r=R_b} \frac{2\sigma\Phi_0}{r\pi} dr}$$

$$R_{cd} = \frac{\pi / 2}{\sigma \Delta \ln \frac{R_b}{R_a}}$$

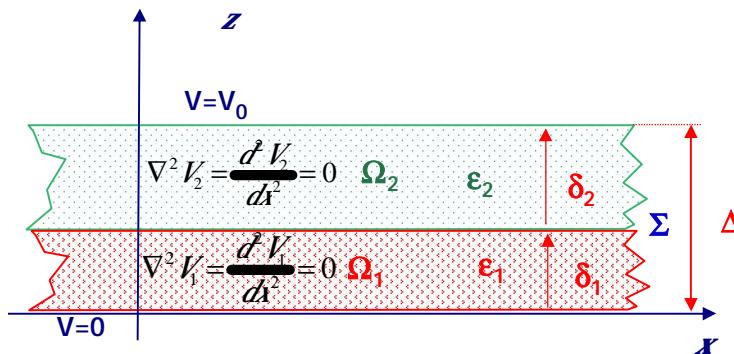


Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Condensatore doppio strato

Si vuole calcolare la capacità per unità di superficie di un condensatore a doppio strato con diversa costante dielettrica



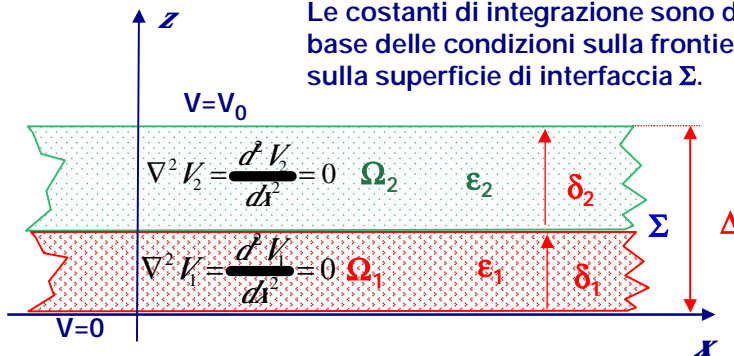
Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



In ogni dominio è possibile scrivere una equazione di Laplace monodimensionale la cui soluzione generale è del tipo:

$$\begin{matrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ V_1(z) = Az + B & V_2(z) = Cz + D \end{matrix}$$

Le costanti di integrazione sono da calcolare sulla base delle condizioni sulla frontiera e di raccordo sulla superficie di interfaccia Σ .



Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Si avrà pertanto:

$$\begin{matrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ V_1(z=0) = 0 \Rightarrow B=0 & V_2(z=\Delta) = C\Delta + D = V_0 \end{matrix}$$

Per la continuità della componente tangente a Σ del campo elettrico:

$$V_1(z=\delta_1) = V_2(z=\delta_1) \Rightarrow A\delta_1 = C\delta_1 + D$$

Per la continuità della componente normale a Σ dell'induzione elettrica:

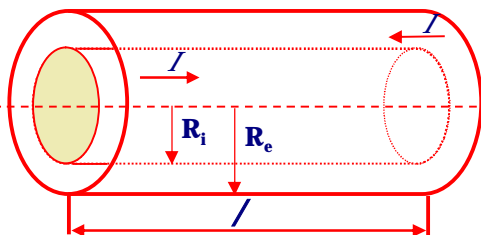
$$\epsilon_1 \frac{dV_1}{dz}(z=\delta_1) = \epsilon_2 \frac{dV_2}{dz}(z=\delta_1) \Rightarrow \epsilon_1 A = \epsilon_2 C$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite rappresentate dalle costanti di integrazione. Una volta calcolate, si può determinare il potenziale ed il campo elettrico in ogni mezzo. Noto il campo si può calcolare quindi la capacità richiesta.

Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Calcolo dell'induttanza p.u.l. di un cavo coassiale



Si vuole calcolare l'induttanza p.u.l. di un cavo coassiale in cui il conduttore "massiccio" interno di raggio R_i è interessato da una corrente I distribuita uniformemente sulla sezione, e quello esterno di spessore trascurabile e raggio R_e dalla corrente $-I$.

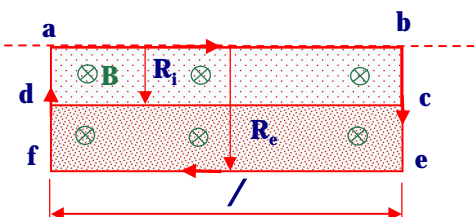
Tra i due conduttori è presente uno strato dielettrico.

Il campo $\mathbf{B}=\mathbf{B}(r)$ risulta dato da:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{\pi r^2}{\pi R_i^2} \right) \mathbf{i}_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_i^2} \mathbf{i}_\varphi & 0 < r < R_i \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{i}_\varphi & R_i < r < R_e \\ 0 & r > R_e \end{cases}$$



Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Per calcolare l'induttanza:

$$L = \frac{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{I_\gamma}$$

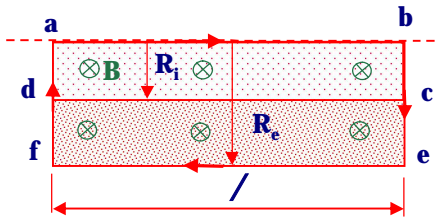
possiamo far riferimento al flusso concatenato con la superficie orlata dalla curva chiusa a-b-e-f-a, che può essere scomposto nei due contributi relativi alla sezione longitudinale del conduttore interno (a-b-c-d-a) o a quella relativa allo spazio tra i due conduttori del cavo coassiale (d-c-e-f-d).

Per quanto riguarda questo ultimo contributo, Φ_{est} si ha:

$$\Phi_{est} = \int_{R_i}^{R_e} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{R_i}^{R_e} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) \Rightarrow L_{est} = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right)$$



Prof. V. Tucci - Corso di Complementi di Elettrotecnica
 Dip. di Ing. dell'Informazione e Ing. Elettrica - Università di Salerno



Per calcolare il contributo relativo alla sezione longitudinale del conduttore interno (a-b-c-d-a) osserviamo che il flusso Φ' relativo ad un tratto l non si concatena con tutta la corrente, ma solo con l'aliquota:

$$I \frac{\pi r^2}{\pi R_i^2}$$

Pertanto, ai fini del calcolo del flusso concatenato, possiamo porre:

$$d\Phi_c = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_i} \left(\frac{r^2}{R_i^2} \right) l \quad \Rightarrow \quad \Phi_c = \int_0^{R_i} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_i} \left(\frac{r^2}{R_i^2} \right) l \quad \Rightarrow \quad L_{\text{int}} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Come è possibile osservare l'induttanza interna è indipendente dal raggio dei conduttori.

