

Relazioni costitutive dei materiali

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{Materiali dielettrici}$$

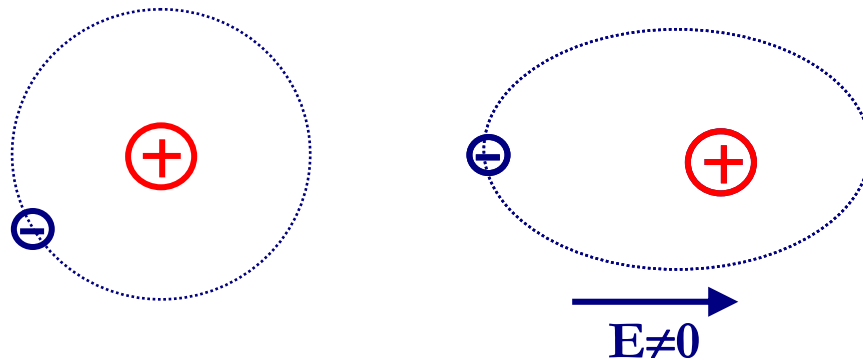
$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \text{Materiali magnetici}$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \quad \text{Materiali conduttori}$$



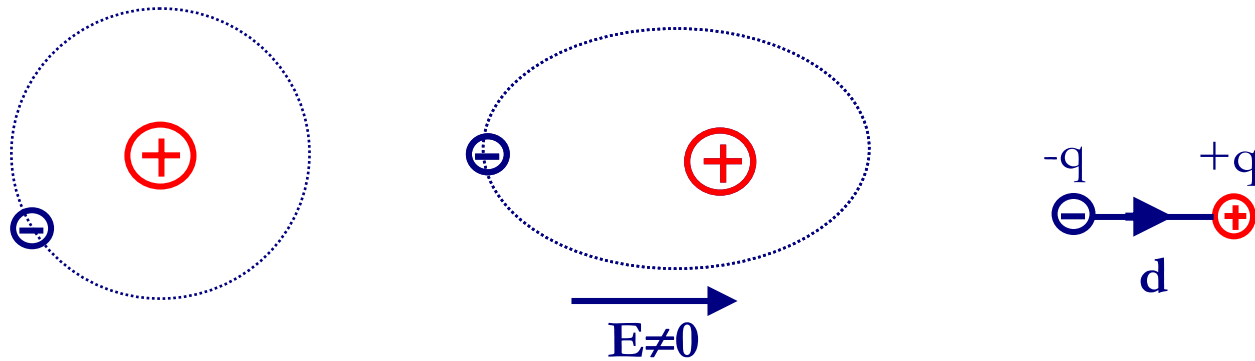
Materiali dielettrici

Nei materiali dielettrici le cariche non sono libere di muoversi liberamente, ma sono legate da forze finite che consentono, in presenza di un campo esterno, solo uno spostamento del loro **baricentro** rispetto alla posizione indisturbata, come nel caso dell'atomo di idrogeno.



Materiali dielettrici

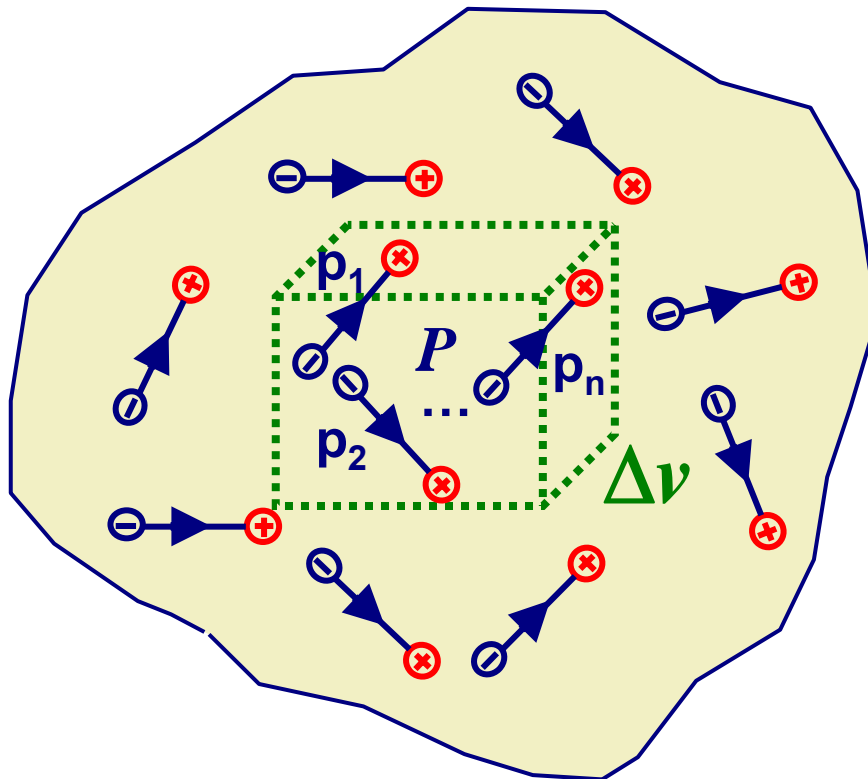
Per tener conto di tale fenomeno si considera il **dipolo elettrico** formato da una coppia di cariche di ugual valore e di segno opposto, separate da una distanza d



Il dipolo è caratterizzato dal suo **momento di dipolo**:

$$p = q d$$

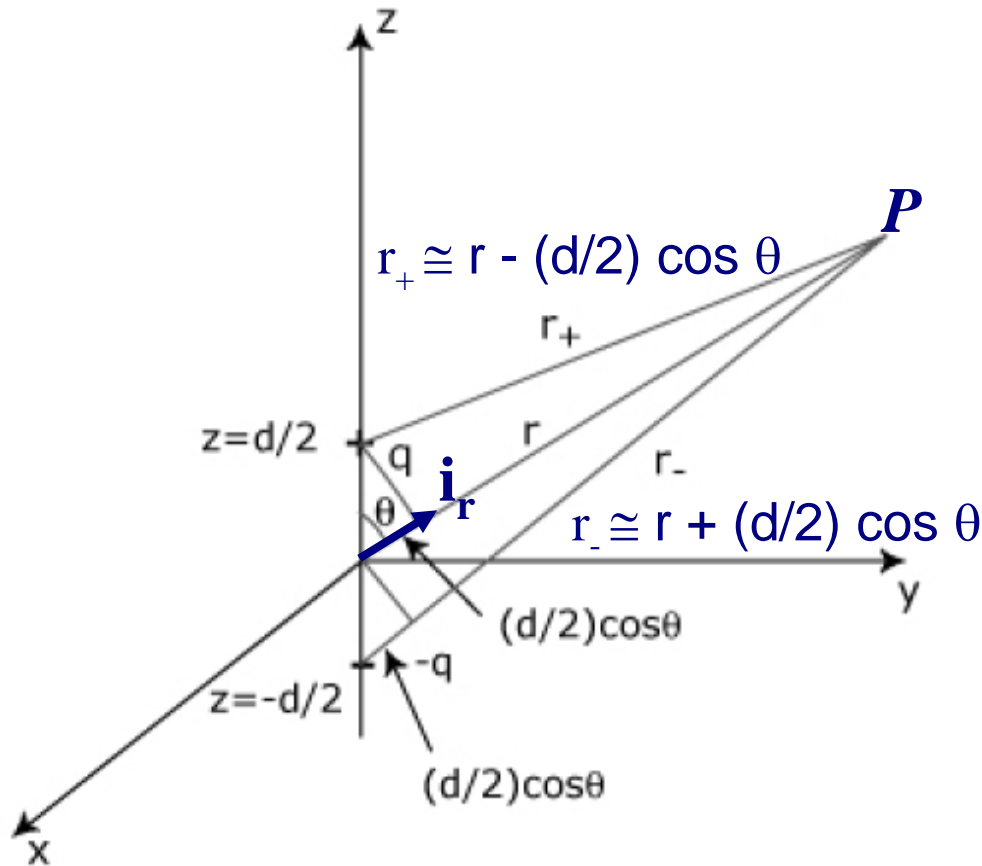
Si può introdurre una descrizione macroscopica definendo intensità di polarizzazione:



$$\mathbf{P}(P) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k}{\Delta v} = N \langle \mathbf{p} \rangle$$

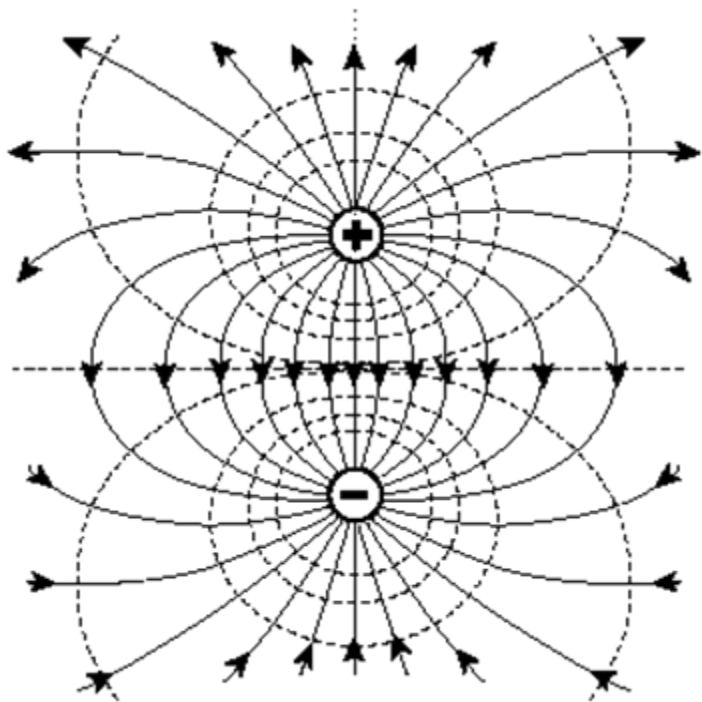
Il limite va inteso in senso “fisico” e non matematico

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right] \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qd \cos\theta}{r^2} \right]$$



$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} \right]$$

Il potenziale di un dipolo elettrico posto nell'origine risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza (e non alla distanza come nel caso della singola carica puntiforme).



$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} \right]$$

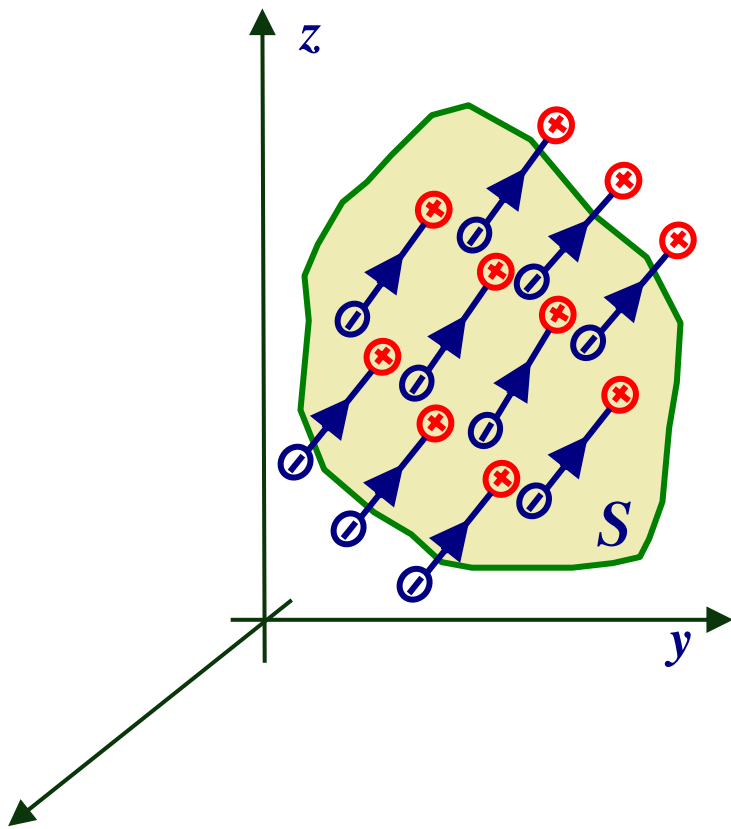
$$\mathbf{p} = q \mathbf{d}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \mathbf{i}_\theta \right]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2qd \cos\theta}{r^3} \mathbf{i}_r - \frac{qd \sin\theta}{r^3} \mathbf{i}_\theta \right]$$

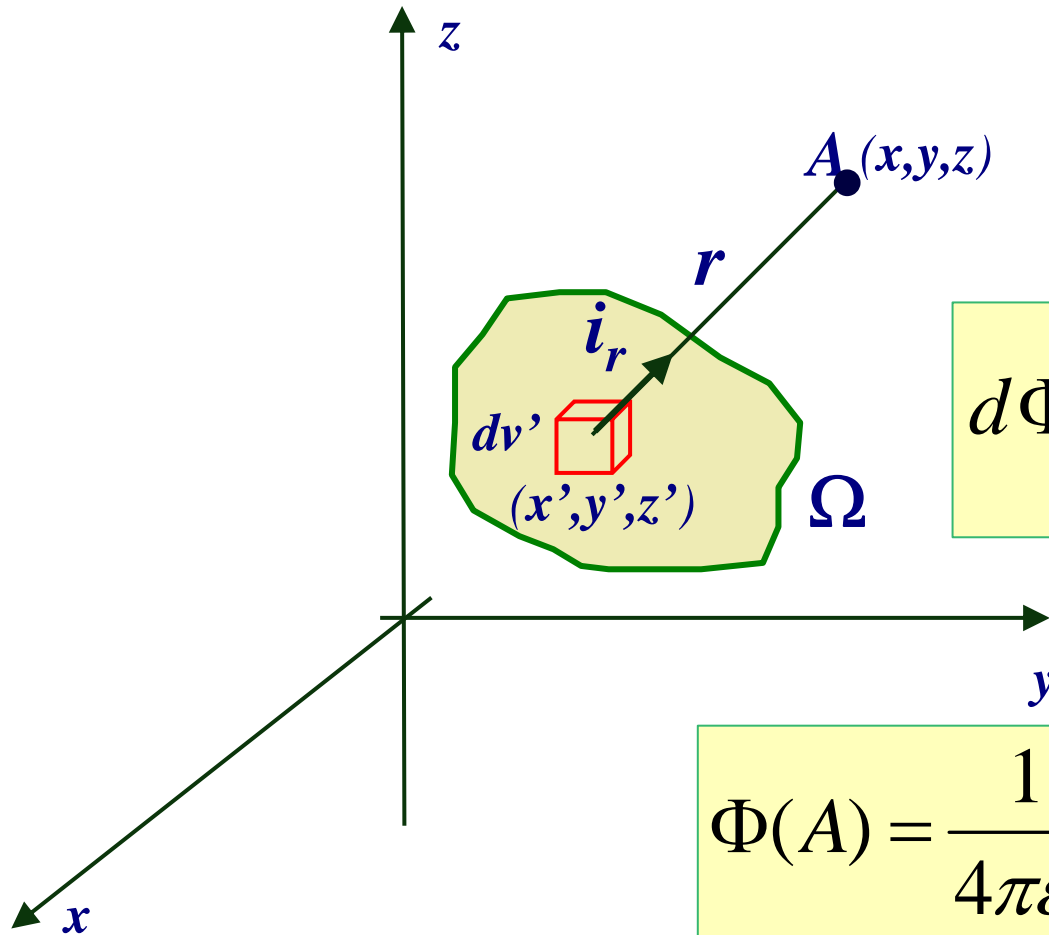
$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos\theta \mathbf{i}_r + \sin\theta \mathbf{i}_\theta]$$

L'effetto dei dipoli può essere portato in conto anche mediante l'introduzione di una densità di carica di polarizzazione.



Consideriamo una superficie chiusa S contenente N dipoli per unità di volume.

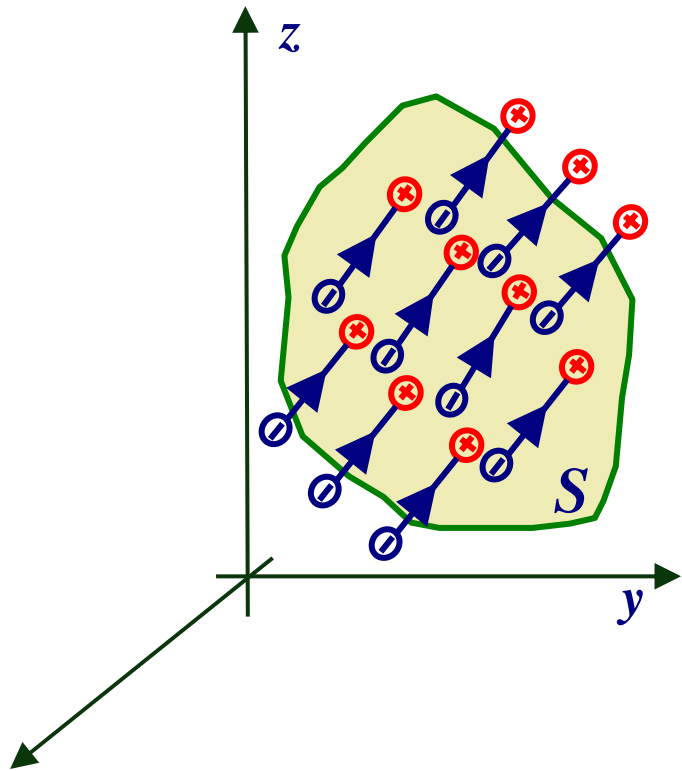
Nel caso di una distribuzione continua di dipoli:



$$d\Phi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} dv'$$

$$\Phi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{P}(x', y', z') \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} dv'$$

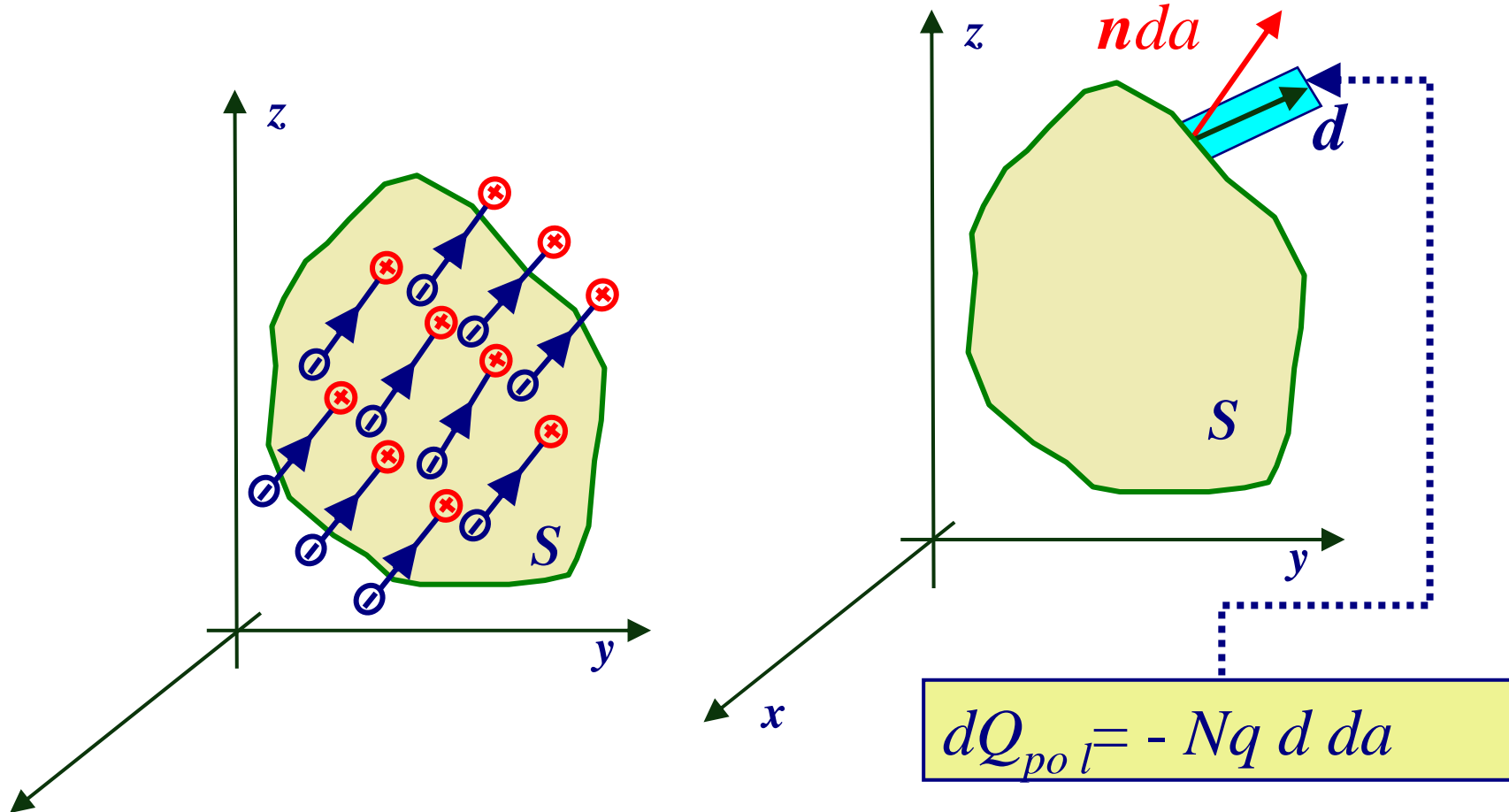


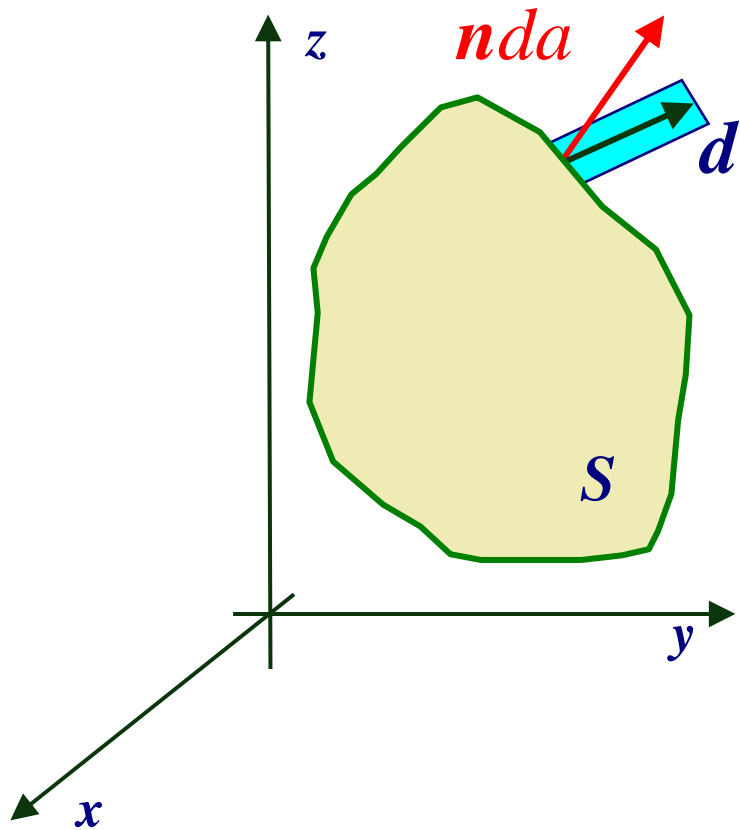


A causa della polarizzazione, alcuni centri di carica possono risultare spostati all'esterno della superficie S lasciando, pertanto, delle cariche non neutralizzate all'interno.

Al fine di determinare la carica presente all'interno di S supponiamo che la carica positiva sia esterna alla superficie e consideriamo le particelle cariche di un elemento da della superficie.

Tutti i centri di carica positivi contenuti nel volumetto $dv = d \times da$ contribuiscono a lasciare una carica negativa all'interno di V





$$dQ_{pol} = -Nq \, da$$

$$Q_{pol} = \oiint_S -Nq \, da = \oiint_S -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Introducendo una densità di carica di polarizzazione ρ_{pol} si potrà scrivere:

$$Q_{pol} = \oiint_S -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{P} \, dv = \iiint_V \rho_{pol} \, dv \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

Poiché anche la carica di polarizzazione ρ_{pol} contribuisce a determinare la distribuzione de campo elettrico si potrà scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_{lib} - \nabla \cdot \mathbf{P}]$$

da cui

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

D vettore spostamento densità di flusso elettrico.



In molti materiali dielettrici di interesse applicativo il legame risulta essere lineare, indipendente dal punto in esame (materiali omogenei) ed indipendente dalla direzione e verso di \mathbf{E} (materiali isotropi):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

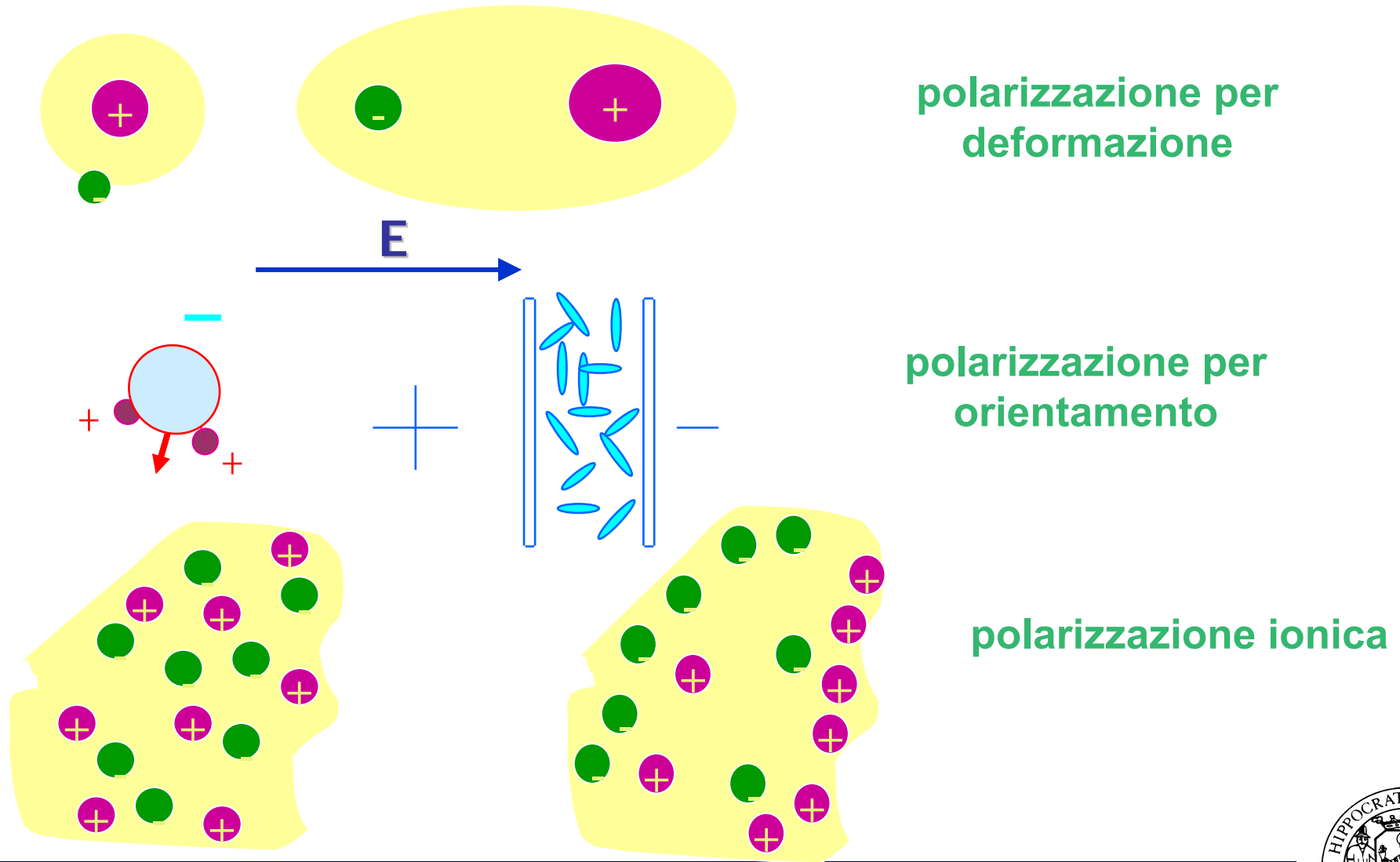
da cui

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

ε_r è la costante dielettrica o permittività relativa del materiale.

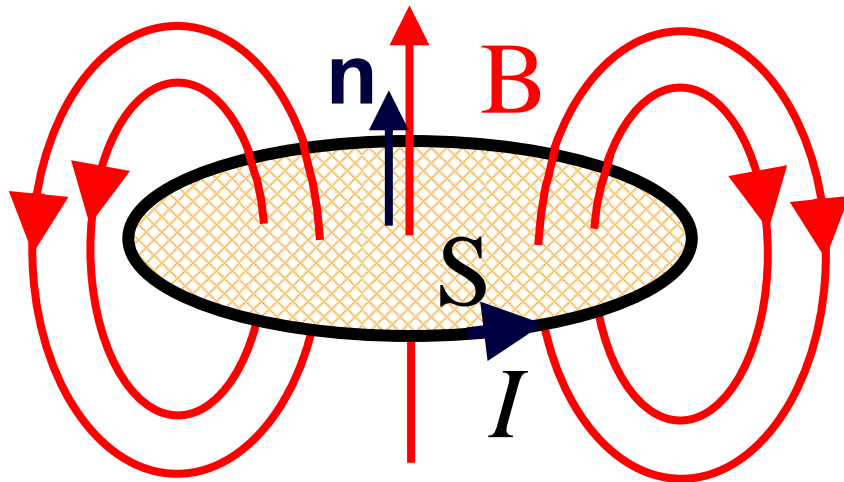


Meccanismi di polarizzazione



Materiali magnetici

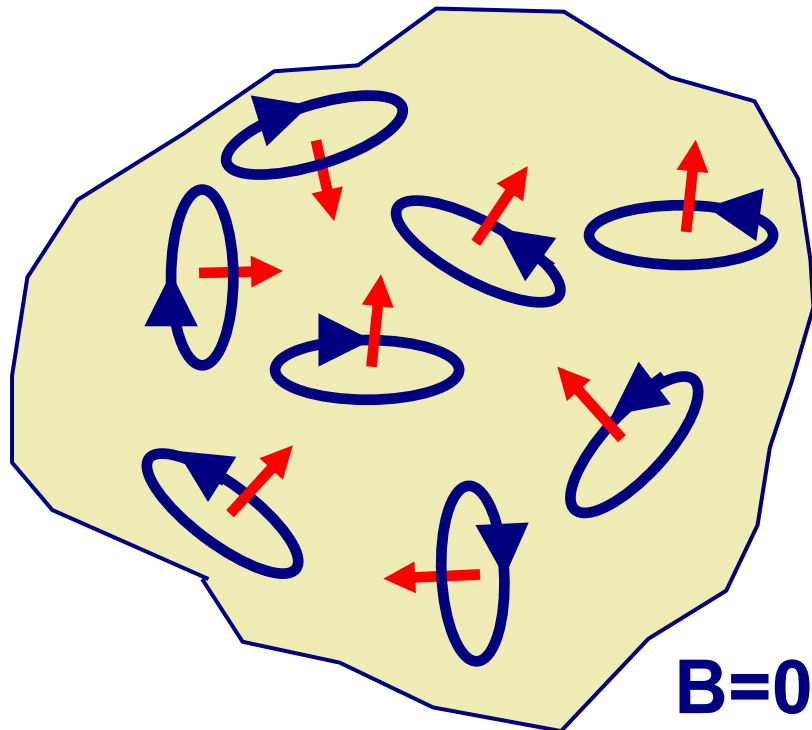
Ogni atomo a causa della rotazione degli elettroni e dello spin elettronico è sede di un campo magnetico interno che può essere considerato simile a quello prodotto da una spira elementare interessata da una corrente I .



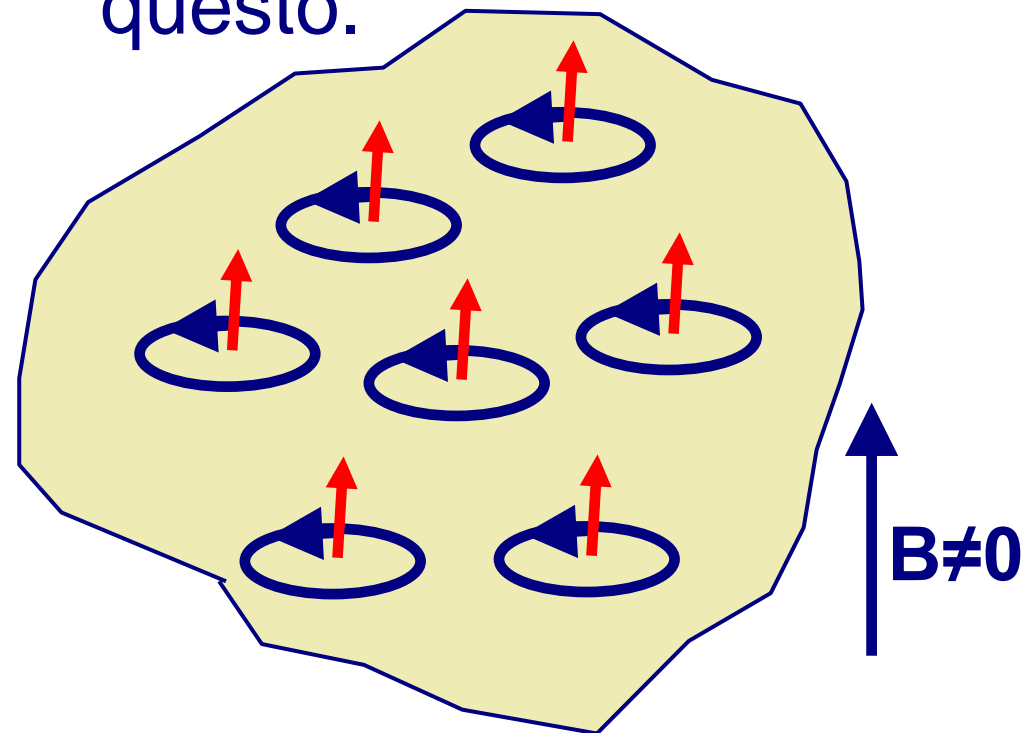
Si definisce **momento magnetico** di una spira percorsa da corrente I la quantità vettoriale:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}\mathbf{n}$$

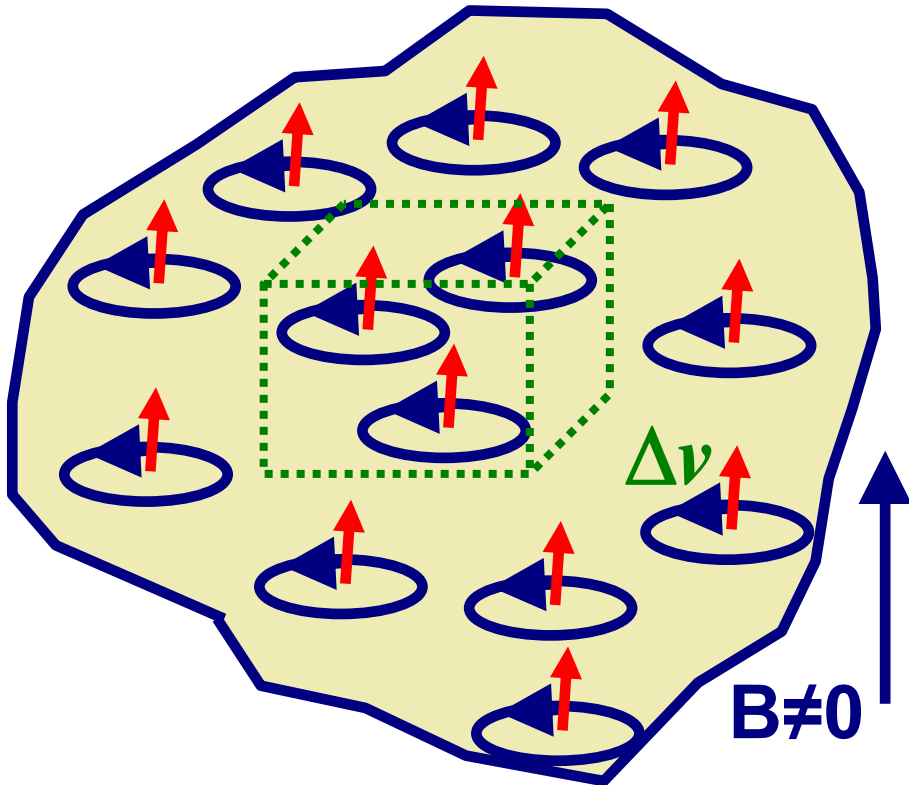
In assenza di un campo magnetico esterno la somma dei momenti atomici o molecolari risulta nulla.



Applicando un campo esterno i momenti elementari si allineano secondo la direzione di questo.

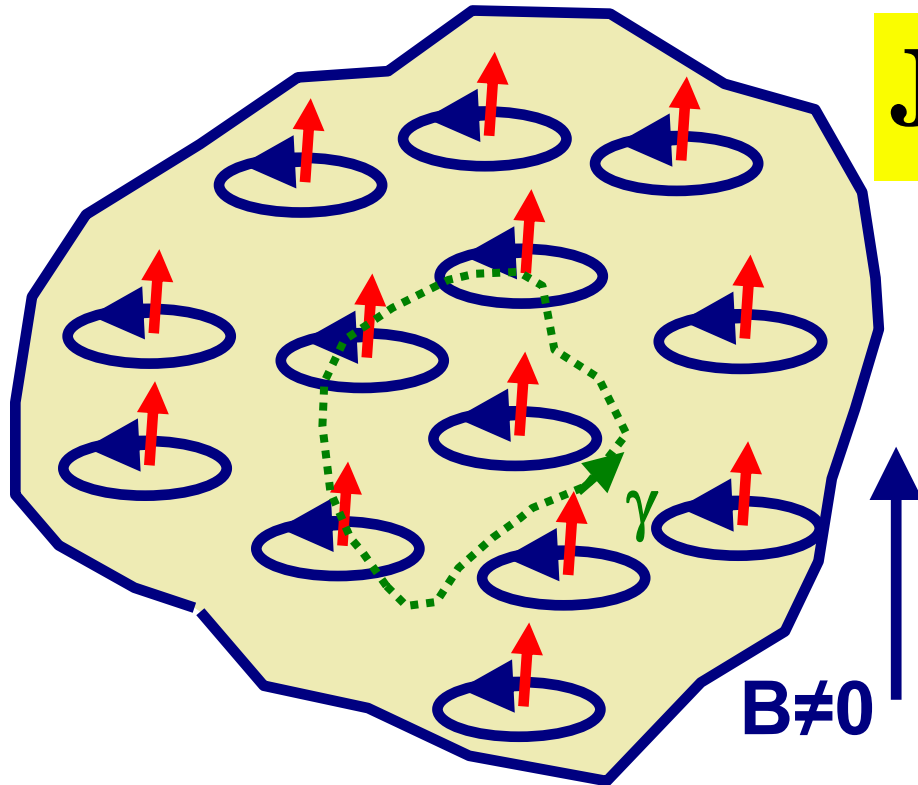


Si può introdurre una descrizione macroscopica definendo intensità di magnetizzazione:



$$\mathbf{M}(P) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta v} = N \langle \mathbf{m} \rangle$$

L'effetto delle correnti elementari può essere descritto da una **densità di corrente molecolare \mathbf{J}_{mol}** :

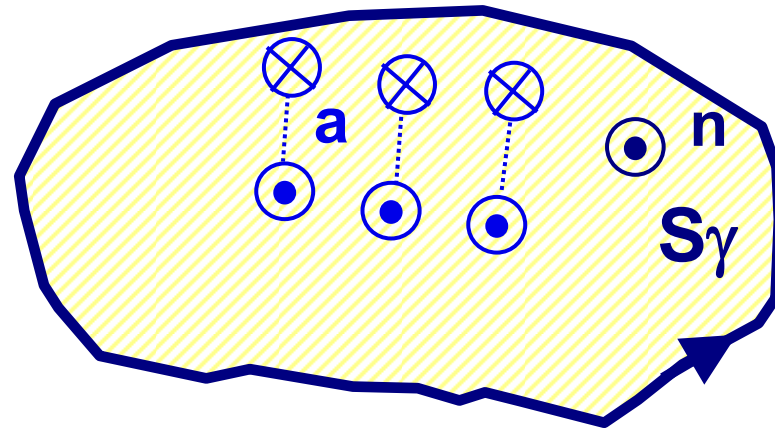
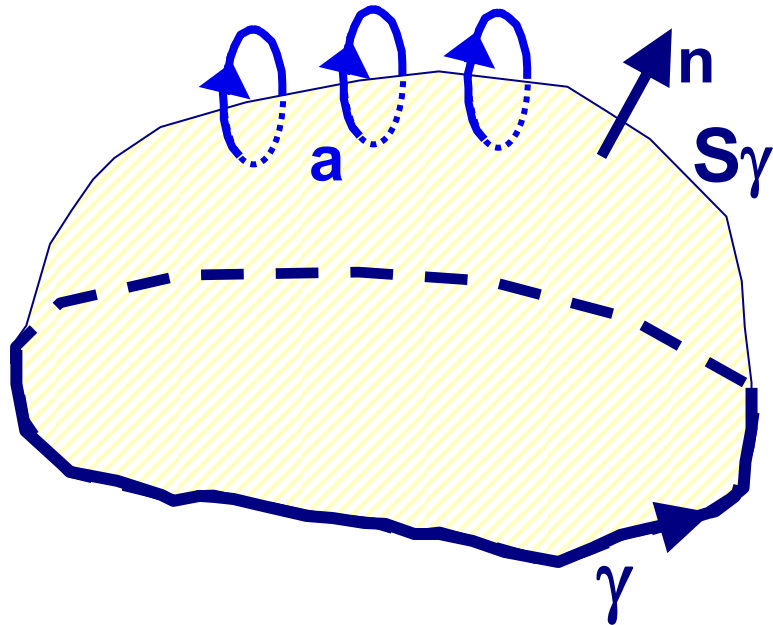


$$\mathbf{J}_{mol} : \quad \mathbf{J}_{mol} \cdot \mathbf{n} ds = dI_{mol}$$

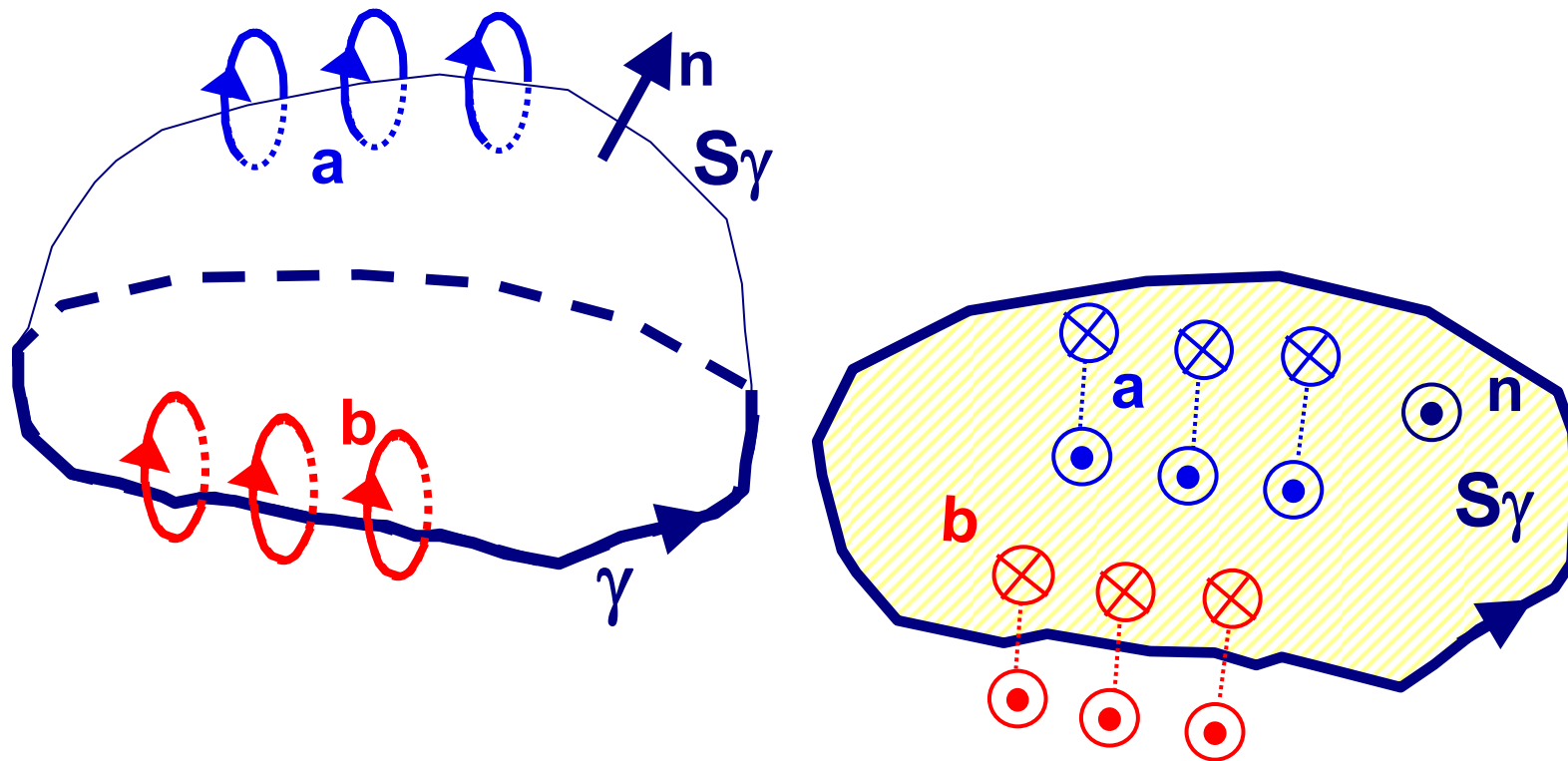
Qual è il legame tra \mathbf{J}_{mol} e \mathbf{M} ?

Si consideri la curva γ ed una superficie S_γ da questa orlata.

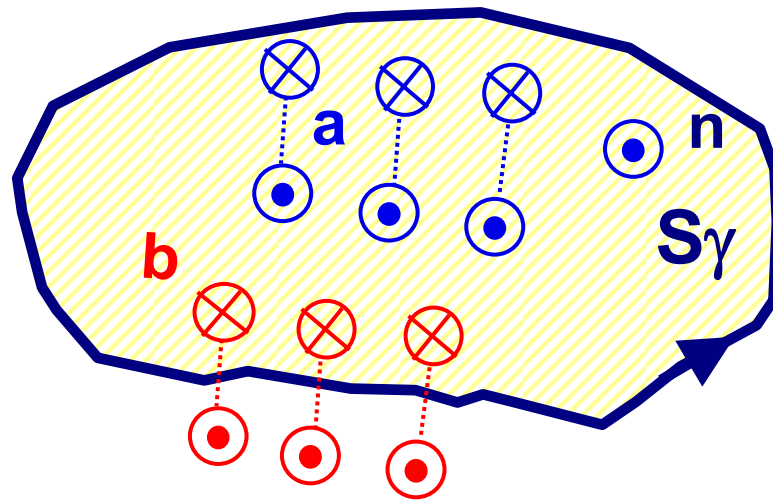
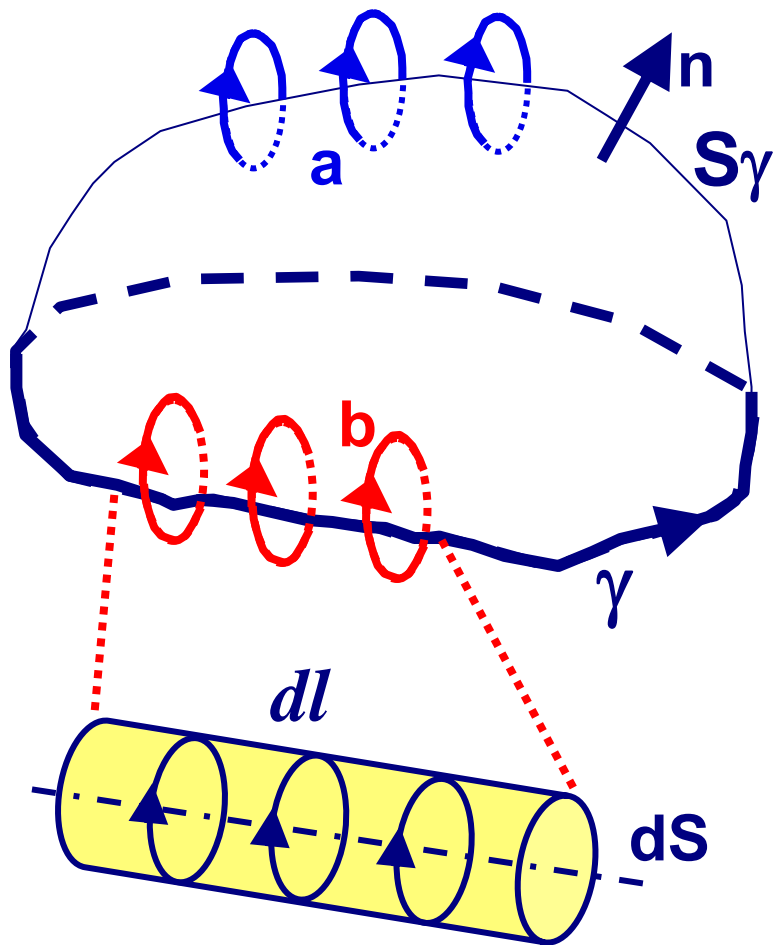
La superficie S_γ sarà interessata da due insiemi di correnti molecolari:



Le correnti di tipo **a** non danno contributo in quanto forano la superficie due volte in senso opposto.



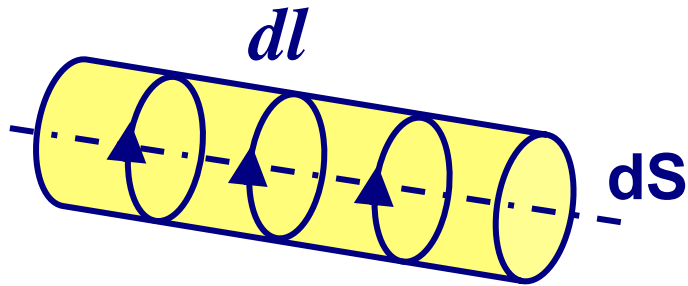
Le uniche correnti a dare contributo saranno quelle appartenenti all'insieme **b** che “forano” la superficie una sola volta e concatenano la curva γ .



La corrente che interessa un elemento dl della curva sarà quella contenuta nel volumetto dv .

$$dI_{mol} = N I dv$$

Tali correnti potranno essere espresse come:



$$dI_{mol} = NIS \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} dl = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl$$

$$dI_{mol} = N I dv$$

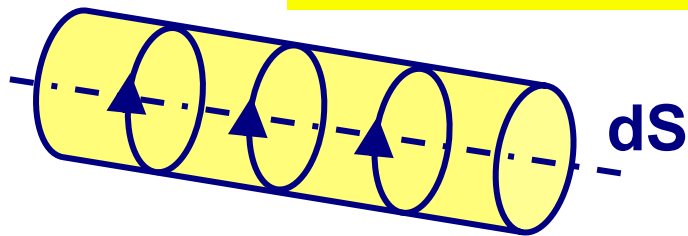
Pertanto la corrente totale sarà data da:

$$I_{mol} = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl$$

$$dI_{mol} = N I S \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} dl = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl \quad \Rightarrow \quad I_{mol} = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl$$

Applicando il teorema di Stokes

$$I_{mol} = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{S_{\gamma}} \nabla \times \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{J}_{mol} \cdot \mathbf{n} ds$$



$$dI_{mol} = N I dv$$

da cui

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{M} &= \mathbf{J}_{mol} \\ \mathbf{M} \times \mathbf{n} &= \mathbf{K}_{Smol} \end{aligned}$$

Queste correnti molecolari costituiscono delle sorgenti a tutti gli effetti del campo di induzione magnetica:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_{lib} + \mathbf{J}_{mol}) = \mu_0 \mathbf{J}_{lib} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$$

Ponendo:
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib}$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$



L'intensità di magnetizzazione **M** rappresenta di fatto il rapporto tra l'incremento di induzione magnetica che si stabilisce quando si sostituisce al vuoto un qualunque materiale e la permeabilità nel vuoto:

$$\mathbf{M} = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)}{\mu_0}$$



I materiali per cui si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$$

sono detti magneti a magnetizzazione rigida

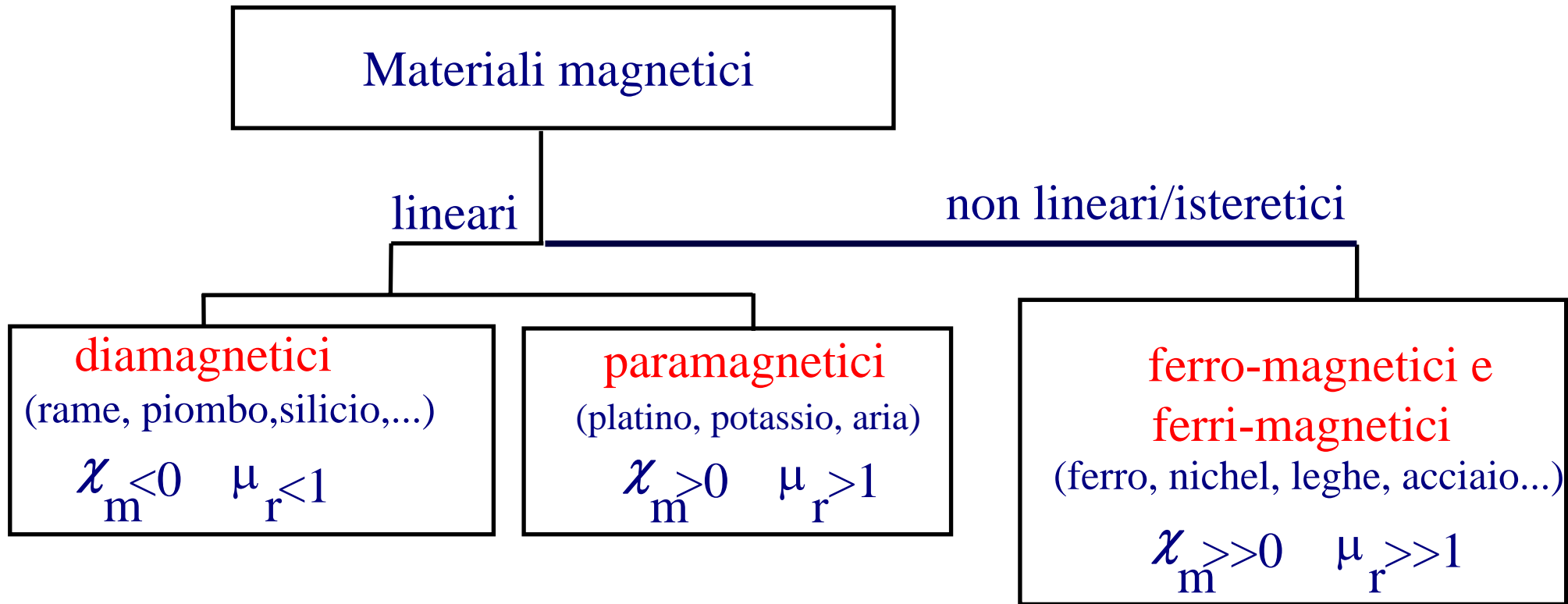
Per materiali lineari ed isotropi si ha

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$



In relazione alle proprietà magnetiche i materiali possono essere classificati in:



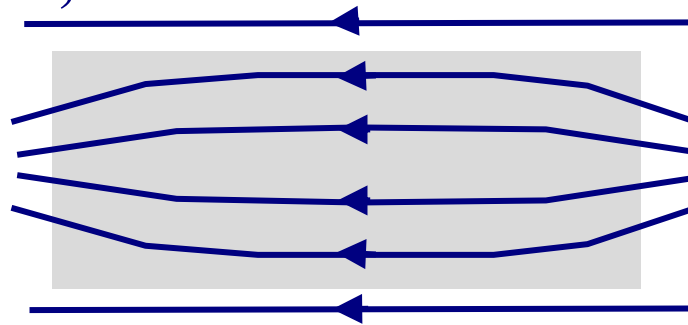
Nelle applicazioni dell'industria elettrica **hanno importanza solo i materiali ferro e ferrimagnetici**



Materiali diamagnetici

- Il campo magnetico all'interno del materiale viene indebolito
- $\mu_r \approx 1$, $|\chi_m| \approx 10^{-6}$
- In un materiale diamagnetico non esistono dipoli magnetici permanenti.
- L'applicazione di un campo di induzione esterno crea dei dipoli con momento di verso opposto e quindi tali da indebolire B .
- esempi: rame, argento, stagno, zinco

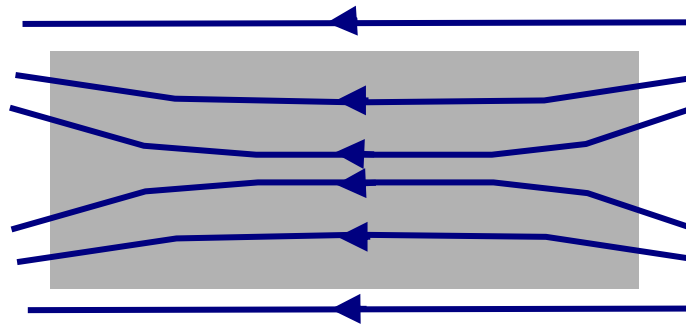
$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$



Materiali paramagnetici

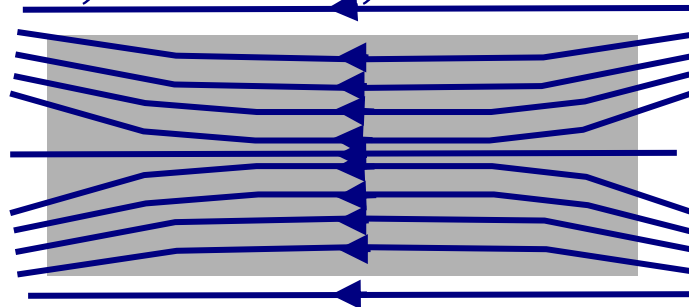
- ❑ Il campo magnetico all'interno del materiale viene rafforzato (debolmente)
- ❑ $\mu_r \approx 1, |\chi_m| \approx 10^{-6}-10^{-2}$
- ❑ In un materiale paramagnetico esistono dipoli magnetici permanenti a livello atomico:
 - per $B=0$ sono orientati in maniera casuale;
 - per $B \neq 0$ si orientano parallelamente al campo esterno rafforzandolo;
 - il fenomeno è disturbato dalla agitazione termica
- ❑ Esempi: alluminio, calcio, platino, ossigeno

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

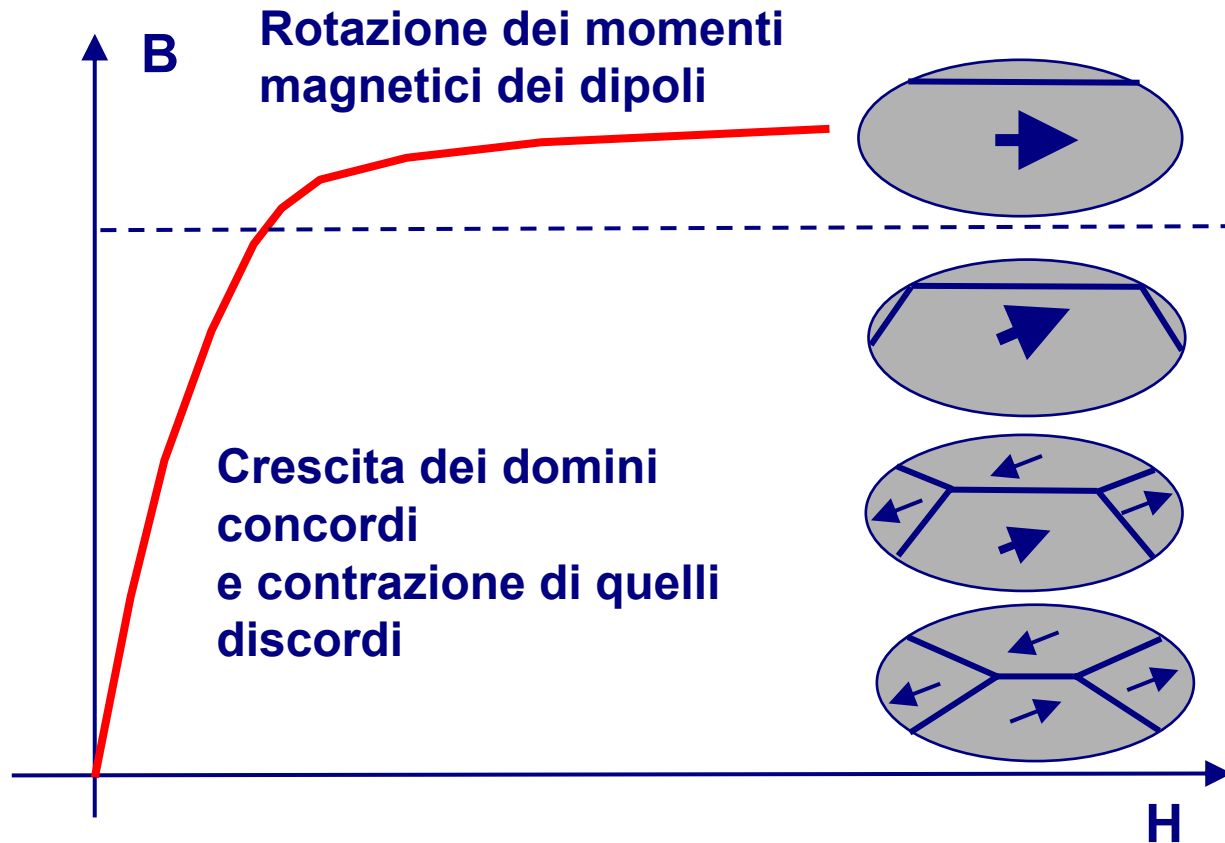


Materiali ferromagnetici

- ❑ Il campo magnetico all'interno del materiale viene rafforzato (notevolmente)
- ❑ $\mu_r \approx 10^3-10^6$
- ❑ In un materiale ferromagnetico esistono dipoli magnetici permanenti raggruppati in domini (di Weiss)
 - per $B=0$ sono orientati in maniera casuale;
 - per B crescente aumentano le dimensioni dei domini e si ha allineamento con il campo esterno
- ❑ Esempi: ferro, cobalto, nichel



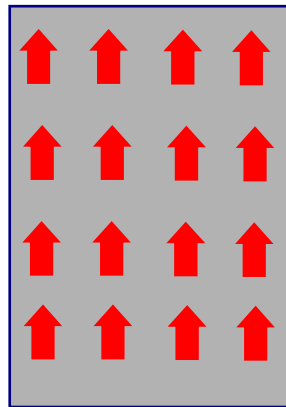
Materiali ferromagnetici



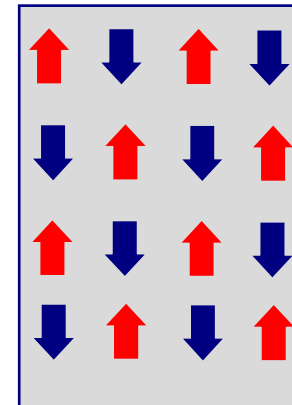
Materiali ferrimagnetici, antiferromagnetici e ferromagnetici

□ Materiali antiferromagnetici

- I dipoli magnetici sono disposti in antiparallelo
- Diventano paramagnetici al disopra di una certa temperatura (di Nèel)
- Esempio: MnO_2



Materiale ferromagnetico

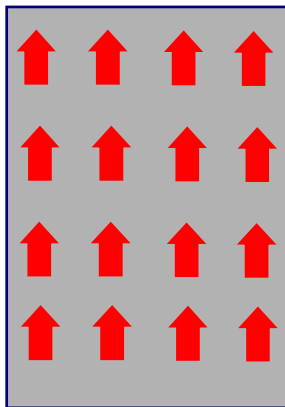


Materiale antiferromagnetico

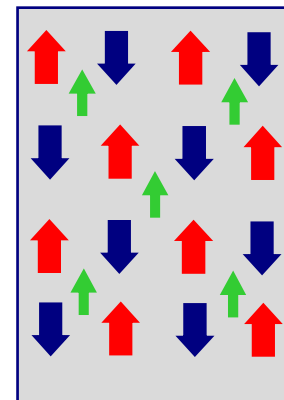
Materiali ferrimagnetici, antiferromagnetici e ferromagnetici

□ Materiali ferrimagnetici

- Contengono dipoli (associati agli ioni) di entità diversa
- L'effetto complessivo è intermedio tra quello di un materiale antiferromagnetico e quello di un materiale ferromagnetico
- Diventano paramagnetici al disopra di una certa temperatura (di Nèel)
- Esempi: materiali ceramici, detti ferriti

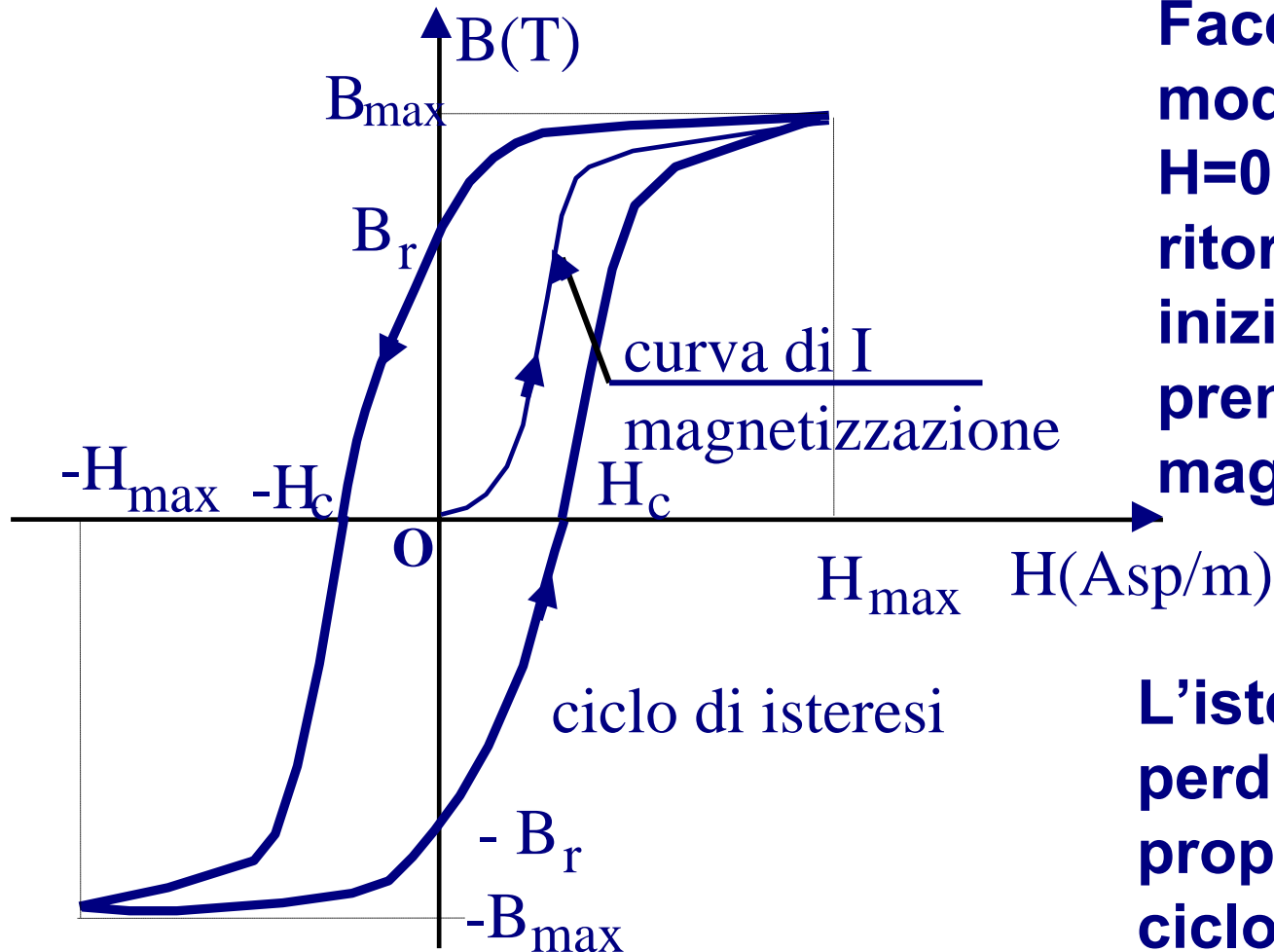


Materiale ferromagnetico



Materiale ferrimagnetico

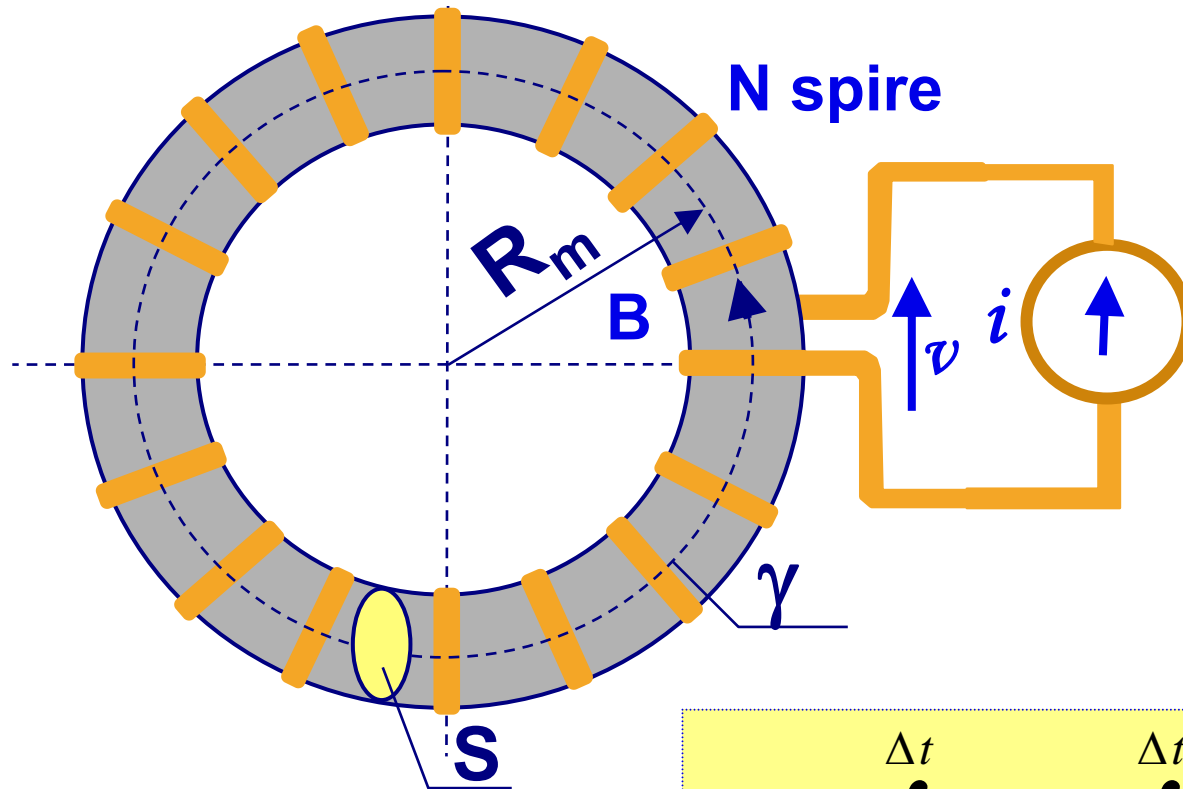
Cicli di isteresi



Facendo variare H in modo ciclico si ha che per $H=0$ non tutti i domini ritornano nello stato iniziale: il fenomeno prende il nome di isteresi magnetica.

L'isteresi produce delle perdite la cui entità è proporzionale all'area del ciclo descritto dalla caratteristica.

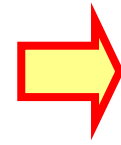
Perdite per isteresi



$$W_f = \int_0^{\Delta t} i v dt = \int_0^{\Delta t} i \left(\frac{d\lambda}{dt} \right) dt = \int_0^{\lambda_{\max}} i d\lambda$$

Dalla legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} dl = Ni = \langle H \rangle 2\pi R_m$$



$$i = \frac{2\pi R_m \langle H \rangle}{N}$$

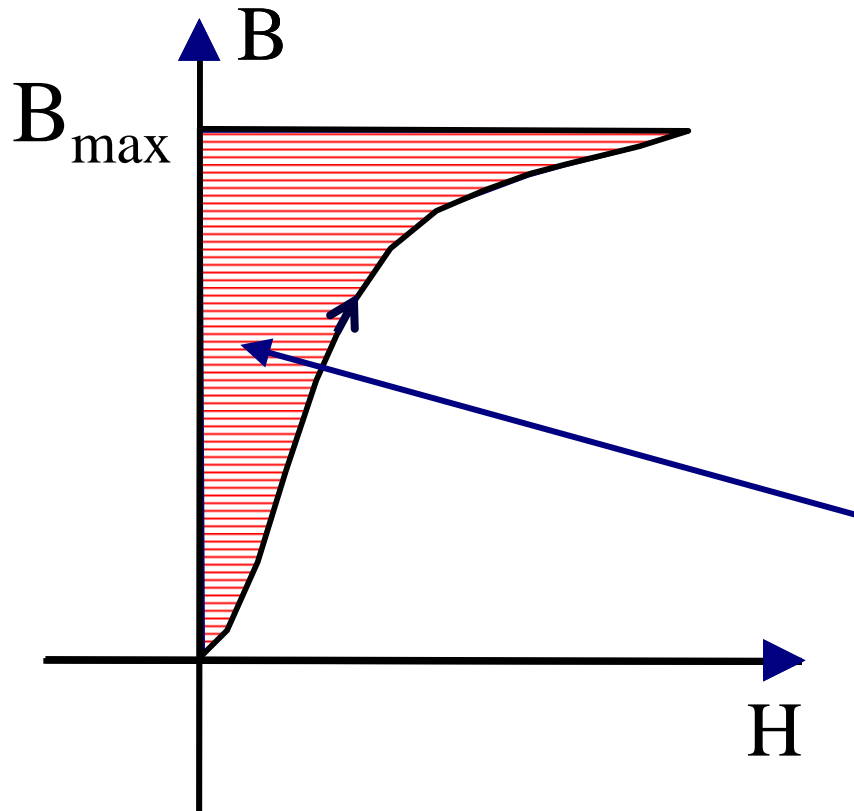
Per il flusso si ha:

$$d\lambda \cong N \langle dB \rangle S$$

$$W_f = \int_0^{\Delta t} i v dt = \int_0^{\Delta t} i \left(\frac{d\lambda}{dt} \right) dt = \int_0^{\lambda_{\max}} i d\lambda = \int_0^{B_{\max}} 2\pi R_m S H dB$$



L'energia specifica (per unità di volume) fornita al materiale per modificare lo stato magnetico (ovvero aumentare o diminuire B) risulta espressa da:

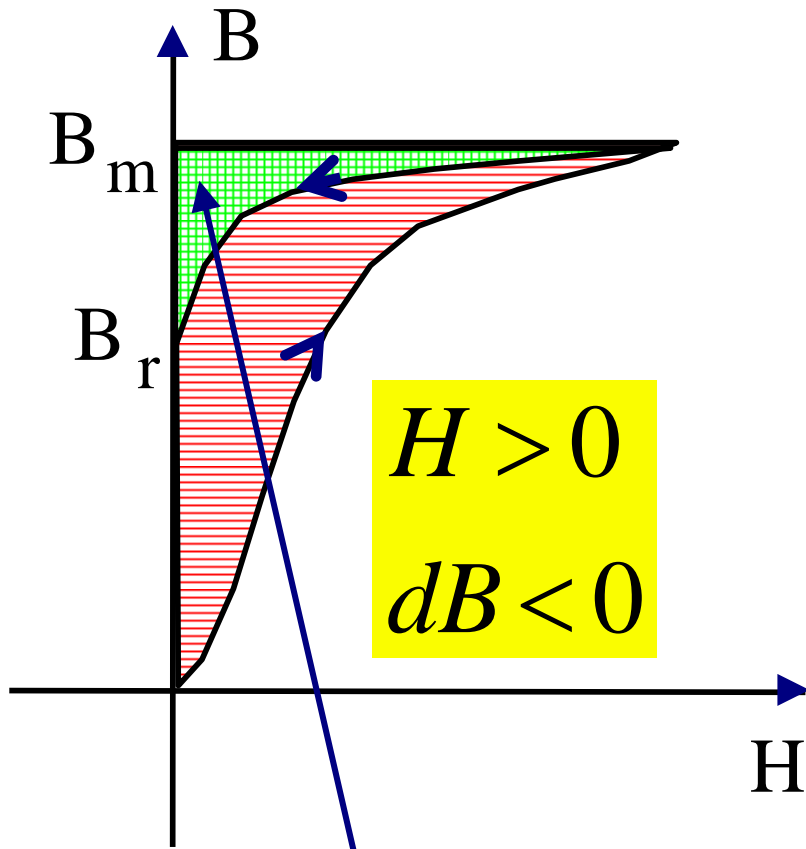


$$w_m = \int_0^{B_{\max}} H dB$$

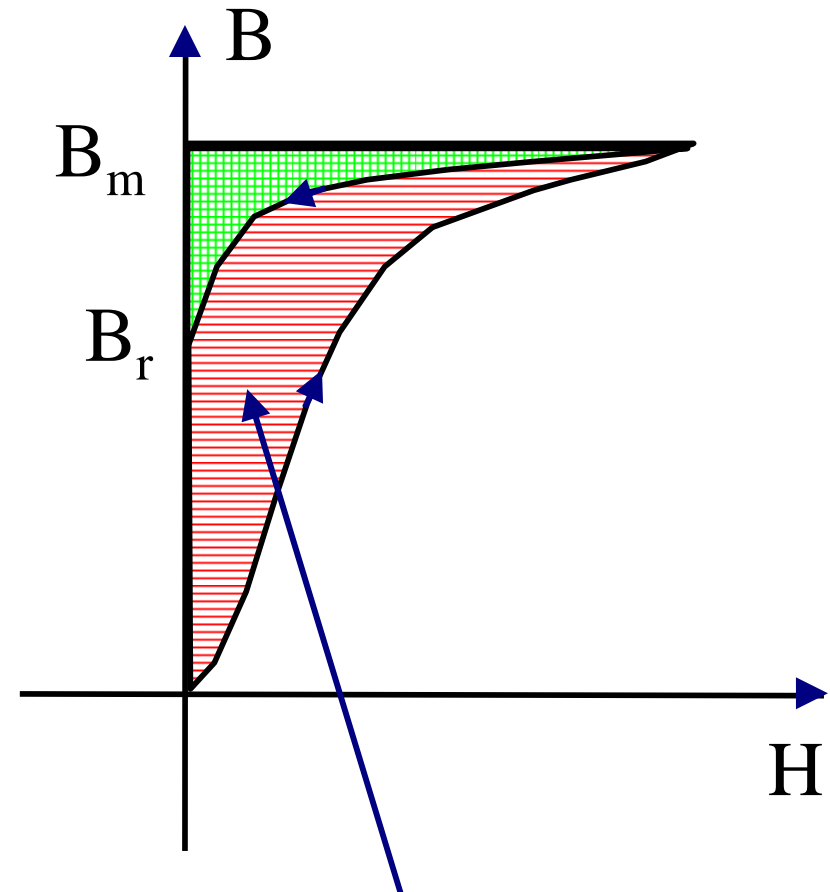
Energia fornita al campo per far crescere la magnetizzazione del materiale.

$$H > 0$$

$$dB > 0$$

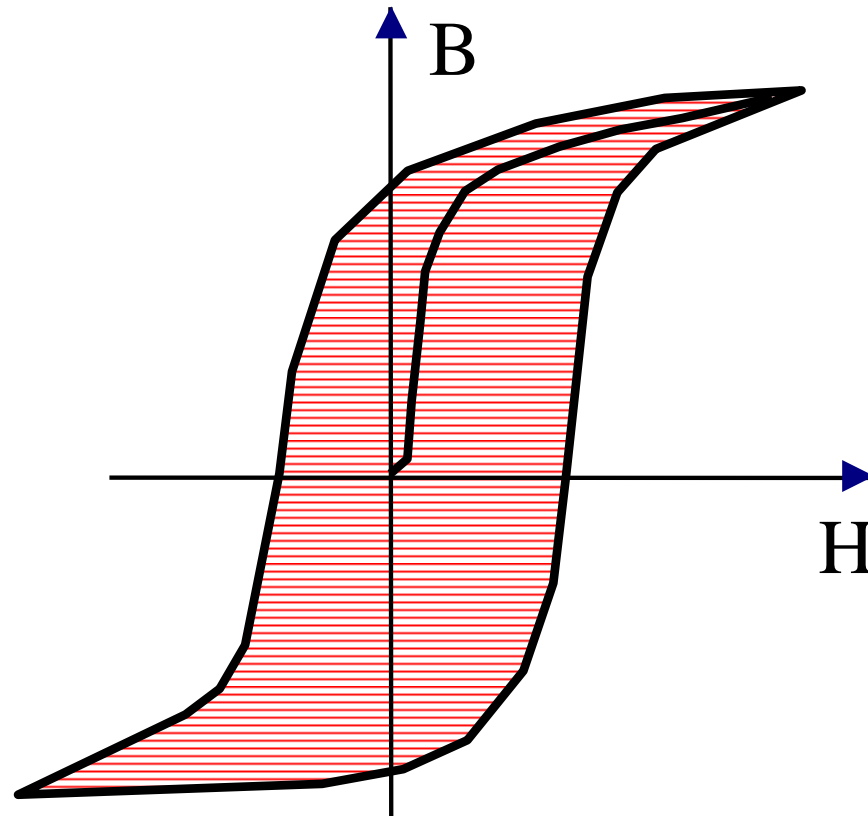


Energia restituita dal campo in seguito alla diminuzione della magnetizzazione del materiale.



Energia netta dissipata nel materiale

L'area del ciclo rappresenta, dunque, l'energia specifica (per unità di volume) dissipata per isteresi (lavoro molecolare con attrito) all'intero del materiale.



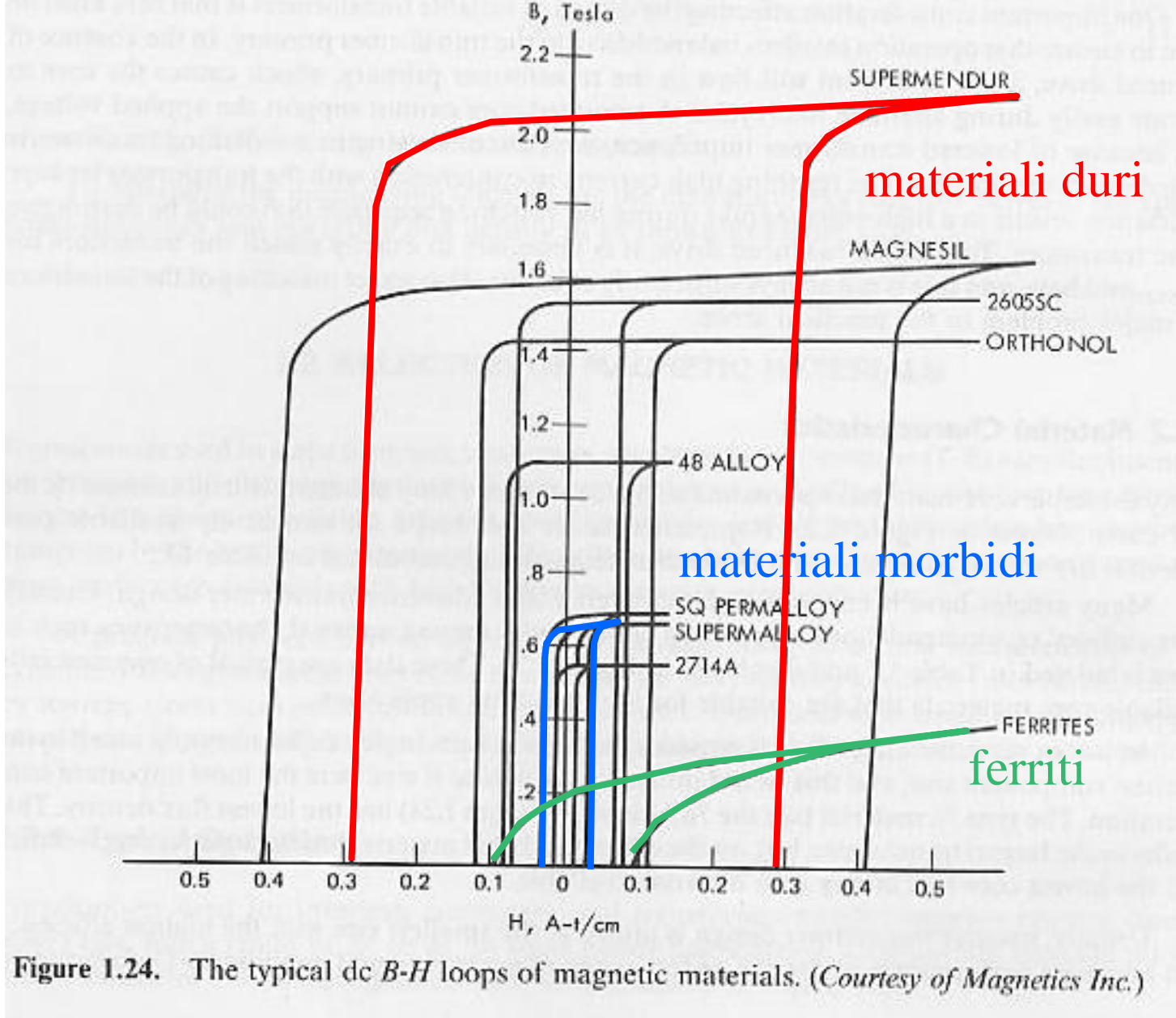


Figure 1.24. The typical dc $B-H$ loops of magnetic materials. (Courtesy of Magnetics Inc.)

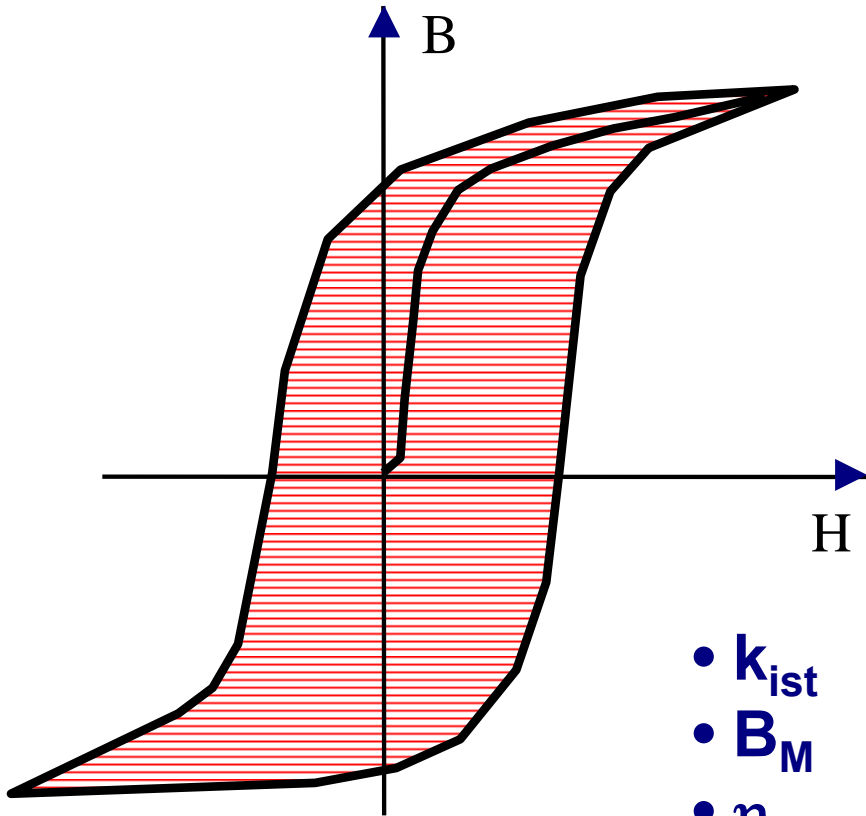


Perdite per isteresi

La potenza dissipata a causa dell'isteresi:

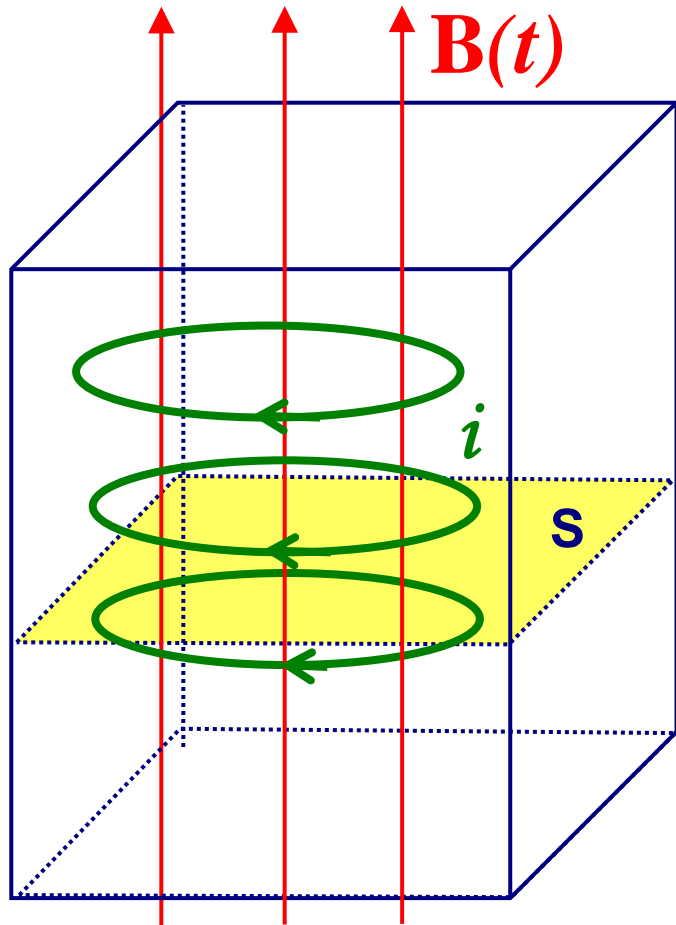
- è proporzionale alla frequenza;
- può essere valutata sulla base della formula di Steinmetz:

$$P_{ist} = k_{ist} \cdot f \cdot B_M^\eta$$



- k_{ist} costante dipendente dal materiale;
- B_M valore max dell'induzione;
- η 1.6- 2.2 e crescente con B

Perdite per correnti parassite



La potenza dissipata a causa delle correnti parassite:

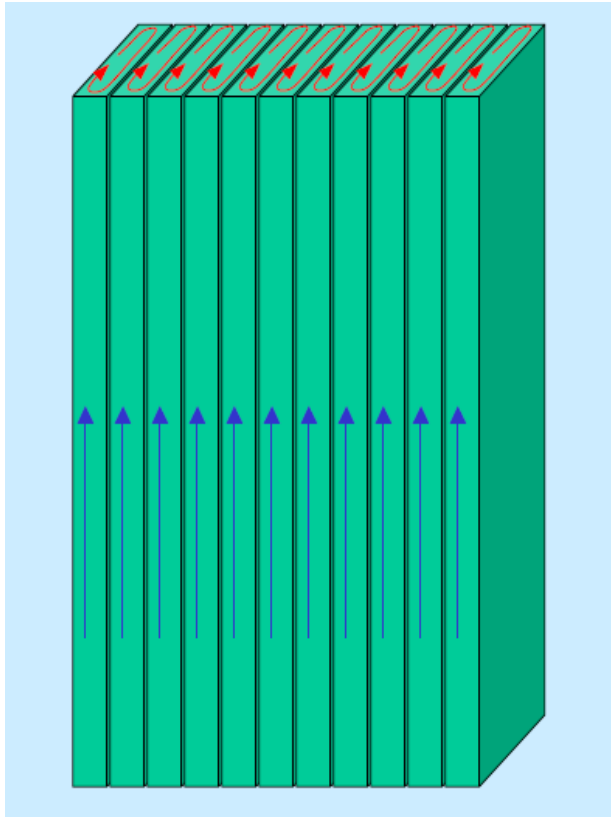
- dipendono dal quadrato della induzione e della frequenza;
- può essere valutata sulla base della formula:

$$p_{cp} = k_{cp} \cdot f^2 \cdot B_M^2$$

- k_{cp} costante dipendente dalla resistività e dalla sezione S del materiale;
- B_M valore max dell'induzione;

Per ridurre le perdite per correnti parassite:

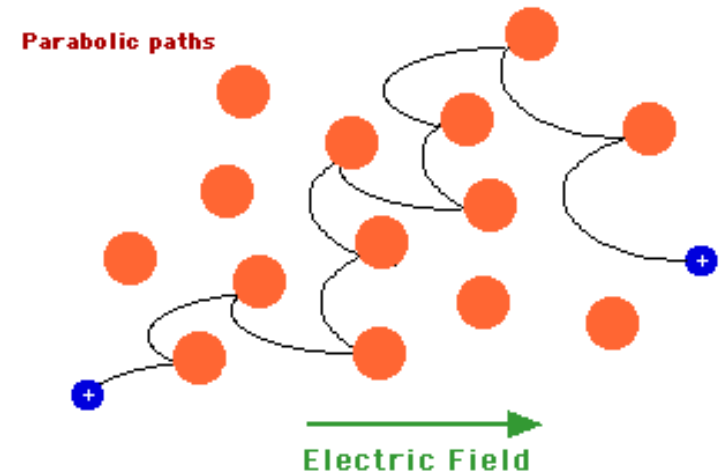
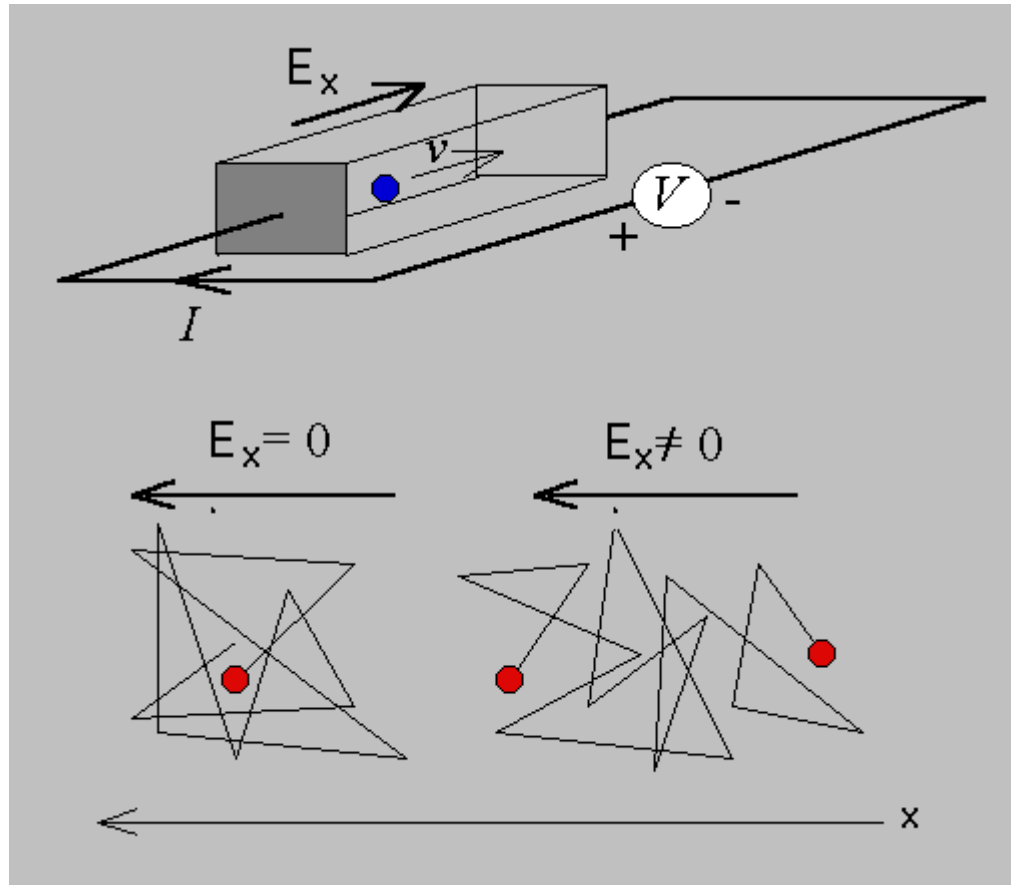
- usare materiali con elevati valori di resistività (attraverso trattamenti termici)
- diminuire la sezione del materiale;
- creare “discontinuità” elettriche nel materiale.



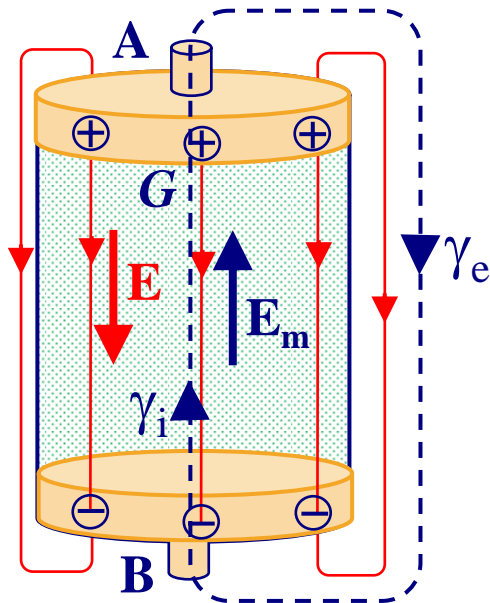
Uso di lamierini sottili:

- spessore da 0.5 – 0.35 mm disposti in modo da opporsi alla circolazione delle correnti parassite

Conduzione



Elettrocinematica

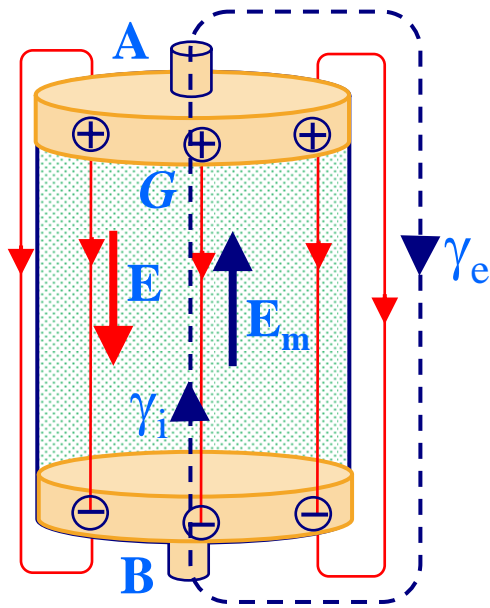


Nella regione del generatore operano le forze in grado di determinare un moto stazionario alle cariche. Si pone pari a e la circuitazione di tale campo elettromotore e ad essa si dà il nome di forza elettromotrice agente su γ

$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl \neq 0$$

La presenza del campo elettromotore determina una separazione delle cariche: la distribuzione di carica fa nascere un campo elettrico che tende ad opporsi a quello elettromotore, fino a quando si raggiunge una condizione di equilibrio nella quale i due campi risultano uguali ed opposti.

Elettrocinematica

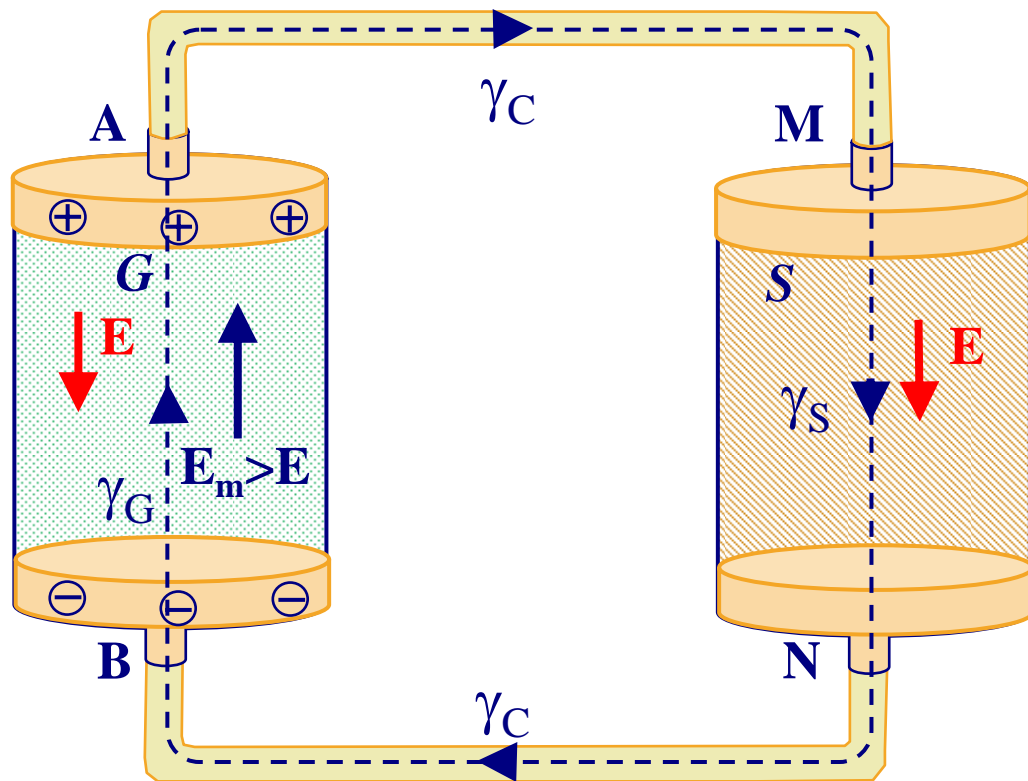


La forza totale agente sui portatori carica, data dalla somma del campo elettromotore e di quello elettrostatico, è nulla nel generatore

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E} \quad \forall P \in \gamma$$

All'interno del generatore $\mathbf{E}_{tot}=0$, mentre l'unico campo presente all'esterno è quello elettrostatico che, data la irrotazionalità, discende da una funzione potenziale:

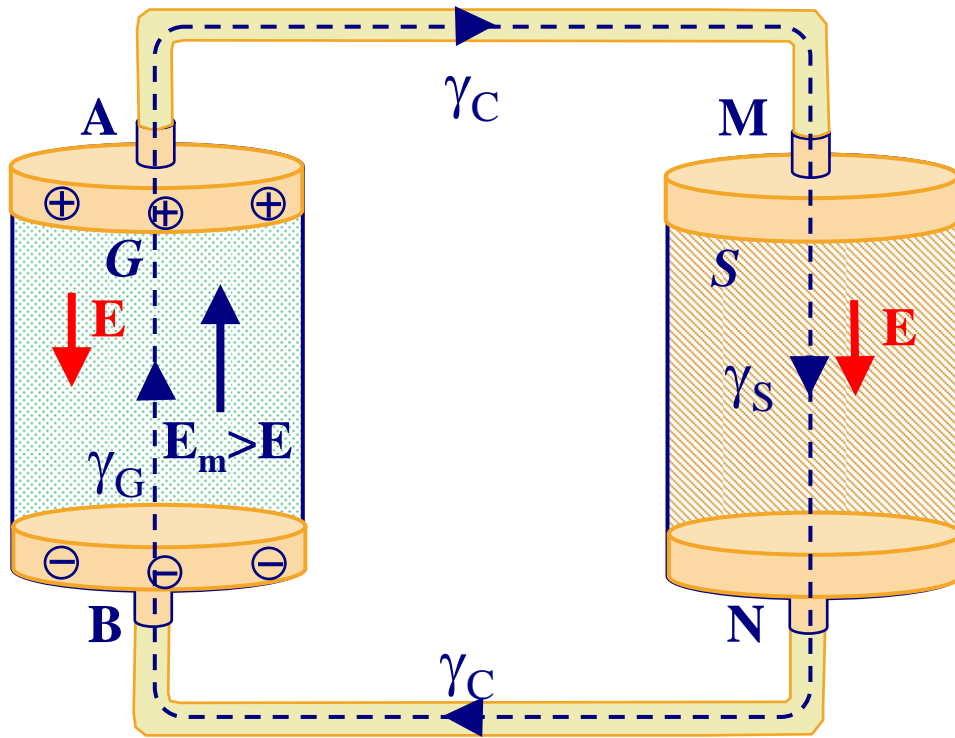
$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{A\gamma_e B} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_B^A \nabla\Phi \cdot \mathbf{t} dl = \Phi(A) - \Phi(B) = v_{AB}$$



Se il generatore è collegato tramite tratti di conduttore perfetto ($\sigma \rightarrow \infty$) ad un componente S , le cariche si muoveranno lungo il circuito dando luogo ad una corrente, descritta da una densità J , che modifica la loro distribuzione nell'intero sistema.

$$J = \sigma_S E \quad \text{nel componente } S$$

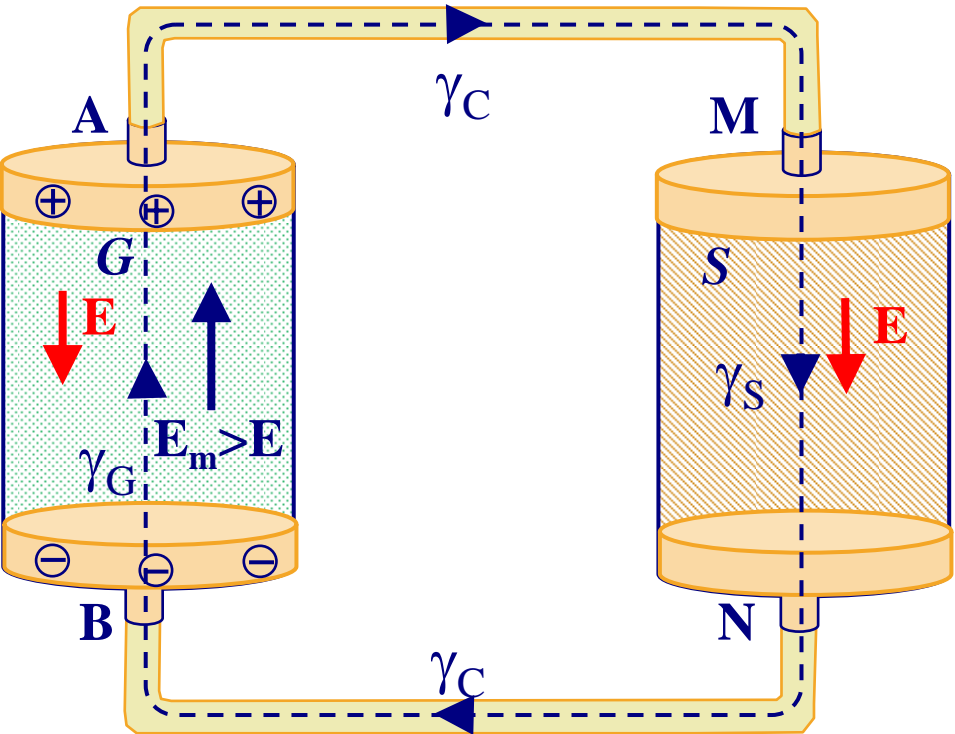
$$J = \sigma_G E_{tot} \quad \text{nel generatore}$$



All'interno del generatore il campo elettrico E è indebolito rispetto al caso a morsetti aperti per effetto del flusso delle cariche nel tratto esterno

Il campo elettromotore risulta prevalente e fa in modo che le cariche si spostino dal terminale a potenziale minore a quello a potenziale maggiore .

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} \, dl = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} \, dl + \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl = e = \int_{B\gamma_G A} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t} \, dl + \int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} \, dl$$



$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl + \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = e$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{B\gamma_G A} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl$$

$$\int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{M\gamma_S N} -\nabla\Phi \cdot \mathbf{t} dl = V_{MN}$$

$$\int_{B\gamma_G A} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{B\gamma_G A} \frac{A_G}{A_G \sigma_G} \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl = I \int_{A\gamma_G B} \frac{dl}{A_G \sigma_G} = R_G I$$

$$V_{MN} = e - R_G I$$

