

# Equazioni di Maxwell in forma integrale nei mezzi materiali

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_{\Sigma}} \rho_{lib} dV$$

legge di Gauss

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

legge di Faraday-Neumann

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

legge di Gauss (per il campo magnetico)

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{t} dl = \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J}_{lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS$$

legge di Ampère-Maxwell

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J}_{lib} \cdot \hat{n} dS = - \iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} dV$$

legge di conservazione della carica



# Equazioni in forma differenziale

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib} \quad \text{legge di Gauss}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{legge di Faraday-Neumann}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{legge di Gauss (per il campo magnetico)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{legge di Ampère-Maxwell}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{lib} = \nabla \cdot \mathbf{J}_{lib} = -\frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} \quad \text{legge di conservazione della carica}$$



# Relazioni caratteristiche (costitutive) dei mezzi

	Dielettrici	Conduttori	Magnetici
Legge generale	$D = \varepsilon_0 E + P$	$J = \sigma(E + E_m)$	$B = \mu_0 H + M$
Materiali lineari isotropi	$P = \varepsilon_0 \chi_e E$ $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$	$J = \sigma E$	$M = \mu_0 \chi_m H$ $B = \mu_0 \mu_r H$



# Modelli stazionari e quasi stazionari

Dal modello generale si ricavano alcuni modelli validi in condizioni di funzionamento particolari.

<b>modelli stazionari</b>	<b>modelli quasi stazionari</b>
Nel caso in cui le grandezze nel sistema e.m. in esame non varino nel tempo si fa riferimento ai <b>modelli stazionari</b> nei quali i campi sono “disaccoppiati”	Nel caso in cui le variazioni temporali delle grandezze nel sistema e.m. in esame siano descritte da tempi caratteristici “grandi” rispetto al tempo richiesto per la propagazione dell’onda e.m. si può far riferimento ai <b>modelli quasi stazionari</b>



# Modelli stazionari

## Modelli stazionari

Elettrostatica	Magnetostatica	Campo stazionario di corrente
$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{J}_{lib} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{J}_{lib} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \end{cases}$



# Modelli quasi stazionari

## Modelli quasi stazionari

**Q.S.E.**

**Q.S.M.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathit{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \mathit{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \cong 0 \\ \mathit{div} \mathbf{B} = 0 \\ \mathit{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (J + \partial \mathbf{D} / \partial t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathit{div} \mathbf{B} = 0 \\ \mathit{rot} \mathbf{H} = (\mathbf{J}_{lib} + \partial \mathbf{D} / \partial t) \cong \mathbf{J}_{lib} \\ \mathit{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \mathit{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \end{array} \right.$$



## Modelli quasi stazionari

**Q.S.E.**

**Q.S.M.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \cong 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\mathbf{J}_{lib} + \partial \mathbf{D} / \partial t) \cong \mathbf{J}_{lib} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \end{array} \right.$$

$$W_{tot} = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv + \iiint_V \frac{1}{2\mu} B^2 dv$$

$$W_{tot} \cong \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv$$

Q.S.E.  
 $\omega \rightarrow 0$

$$W_{tot} \cong \iiint_V \frac{1}{2\mu} B^2 dv$$

Q.S.M.  
 $\omega \rightarrow 0$



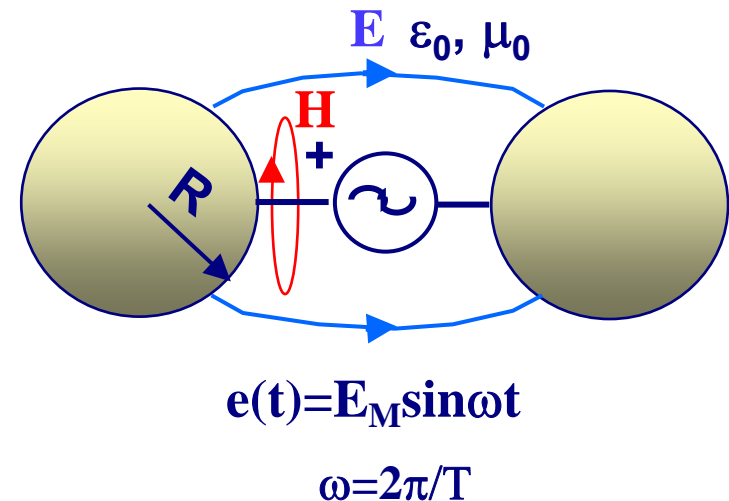
I modelli quasi stazionari pur non essendo rigorosi hanno notevole interesse pratico.

Quali sono i limiti di validità di tali modelli?

Consideriamo un sistema descritto dal modello QSE nel caso in cui il mezzo sia il vuoto. Si tratta di due sfere realizzate con materiale conduttore perfetto tra le quali un generatore sinusoidale determina una tensione  $e(t)$ .

Effettuiamo una stima degli ordini di grandezza dei campi in gioco considerando come unità di scala:

- per la dimensione geometrica  $L=2R$
- per la dimensione temporale  $T$





Approssimiamo le derivate (rapporti tra quantità infinitesime) con rapporti tra le quantità “finite”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathit{div} \mathbf{E} = \rho_{lib} / \varepsilon_0 \\ \mathit{rot} \mathbf{E} = -\partial(\mu_0 \mathbf{H}) / \partial t \cong 0 \\ \mathit{div} \mu_0 \mathbf{H} = 0 \\ \mathit{rot} \mathbf{H} = (J + \partial \varepsilon_0 \mathbf{E} / \partial t) \end{array} \right.$$

Dalla legge di Gauss:

$$E / L = \rho_{lib} / \varepsilon_0 \rightarrow E = \rho_{lib} L / \varepsilon_0$$

Applicando la legge di Ampère Maxwell in una regione non coincidente con il generatore

$$\rightarrow H / L = \varepsilon_0 E / T \rightarrow H = L \varepsilon_0 E / T = \rho_{lib} L^2 / T$$



Sostituendo il valore così ottenuto di  $H$  nella legge di Faraday, possiamo

apprezzare l'errore che si commette assumendo  $\partial(\mu_0 \mathbf{H})/\partial t \cong 0$

$$|E|_{err} / L = \mu_0 H / T = \mu_0 \rho_{lib} L^2 / T^2$$

da cui:  $|E|_{err} = \mu_0 \rho_{lib} L^3 / T^2$

**E' possibile effettuare un confronto tra i due valori del campo elettrico:**

$$\frac{|E|_{err}}{E} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 L^2}{T^2} = \frac{L^2}{c^2 T^2} = \frac{L^2}{\lambda^2}$$



**L'errore che si commette è tanto più piccolo e quindi l'approssimazione è accettabile quando:**

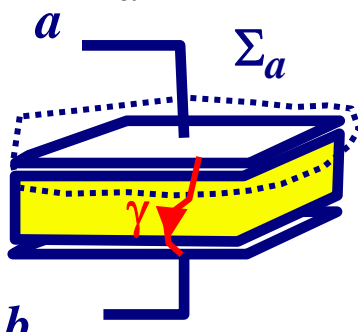
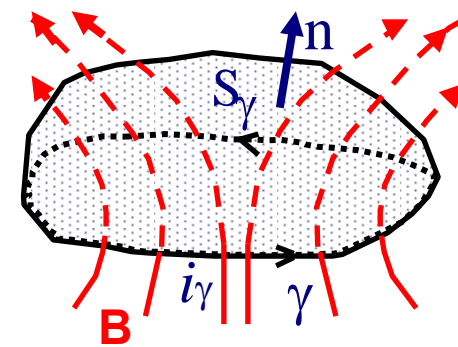
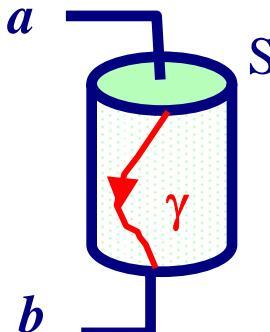
$$\frac{|E|_{err}}{E} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad L \ll \lambda$$

**La dimensione caratteristica del sistema deve essere molto più piccola della lunghezza d'onda del segnale elettromagnetico che si propaga nel sistema.**

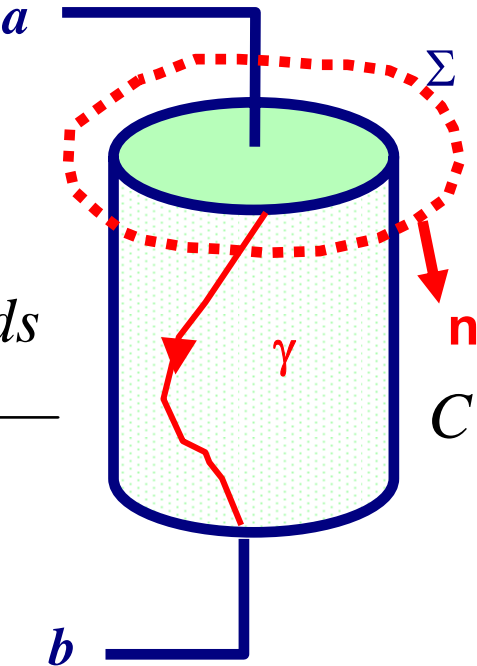
**Con un ragionamento analogo si giunge a conclusioni simili anche per il modello QSM.**



Problemi di campo lentamente variabili possono essere risolti attraverso approssimazioni successive a partire dal corrispondente modello stazionario

Condensatore	Induttore	Resistore
$\mathbf{B} \rightarrow 0 \quad \mathbf{E} \neq 0$	$\mathbf{E} \rightarrow 0 \quad \mathbf{B} \neq 0$	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \neq 0$
$C = \frac{\iint_{\Sigma_a} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}$	$L = \frac{\iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds}{i_\gamma}$	$R = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}$
		

## Dualità G - C

$$G = \frac{\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl} = \frac{\oiint_{\Sigma} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}$$


$$C = \frac{\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl} = \frac{\oiint_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}$$

Per calcolare i parametri  $G, C$  occorre valutare la distribuzione spaziale del campo elettrico.

Tale distribuzione può essere valutata direttamente a partire dalle sorgenti (cariche) solo quando la loro distribuzione è nota in tutto lo spazio ed è caratterizzata da proprietà di “simmetria” (geometrie “mono-dimensionali”).

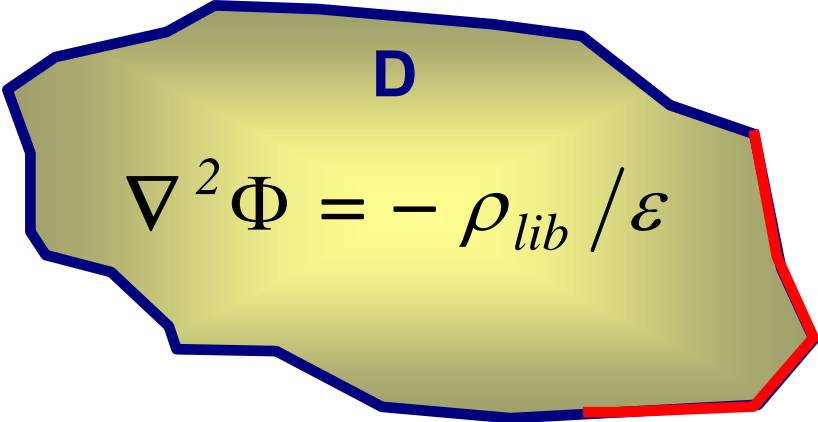
In molti altri casi la distribuzione dei campi può essere ottenuta a partire da un campo potenziale scalare:

$$\nabla \times \mathbf{E} \cong 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi = \rho_{lib} / \varepsilon$$

$$\nabla^2 \Phi = \begin{cases} -\rho_{lib} / \varepsilon & \text{equazione di Poisson} \\ 0 & \text{equazione di Laplace} \end{cases}$$



$$\Phi = f(P)$$


The diagram shows an irregularly shaped domain  $D$  with a yellow-to-green gradient. The boundary is divided into two parts: a blue part and a red part. The equation  $\nabla^2 \Phi = -\rho_{lib} / \epsilon$  is written inside the domain. To the left,  $\Phi = f(P)$  is written. To the right,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = g(P)$  is written.

$$\nabla^2 \Phi = -\rho_{lib} / \epsilon$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = g(P)$$

**In un dominio  $D$  la soluzione del problema di Laplace/Poisson è unica se sulla frontiera di  $D$  si assegnano:**

- i valori del potenziale (condizioni al contorno tipo Dirichlet);
- i valori della derivata normale (condizioni al contorno tipo Neumann);
- condizioni miste

**Anche la soluzione del problema di Laplace/Poisson può essere calcolata per via analitica solo per configurazioni semplici (simmetria). In molti casi si ricorre a metodi numerici (differenze finite, elementi finiti, momenti, ...).**

In coordinate cartesiane  $(x,y,z)$ :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

In coordinate cilindriche  $(r,\varphi,z)$ :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

In coordinate sferiche  $(r,\theta,\varphi)$ :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$





# Magnetostatica

Nel vuoto le equazioni del modello della magnetostatica sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Detto  $\mathbf{A}$  un campo vettoriale (detto potenziale vettore) tale che:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$



Sostituendo nella equazione di Ampere-Maxwell si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Per definire  $\mathbf{A}$  occorre definire anche la sua divergenza.

Utilizzando la gauge di Coulomb,  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ , si ottiene l'equazione di Poisson vettoriale:

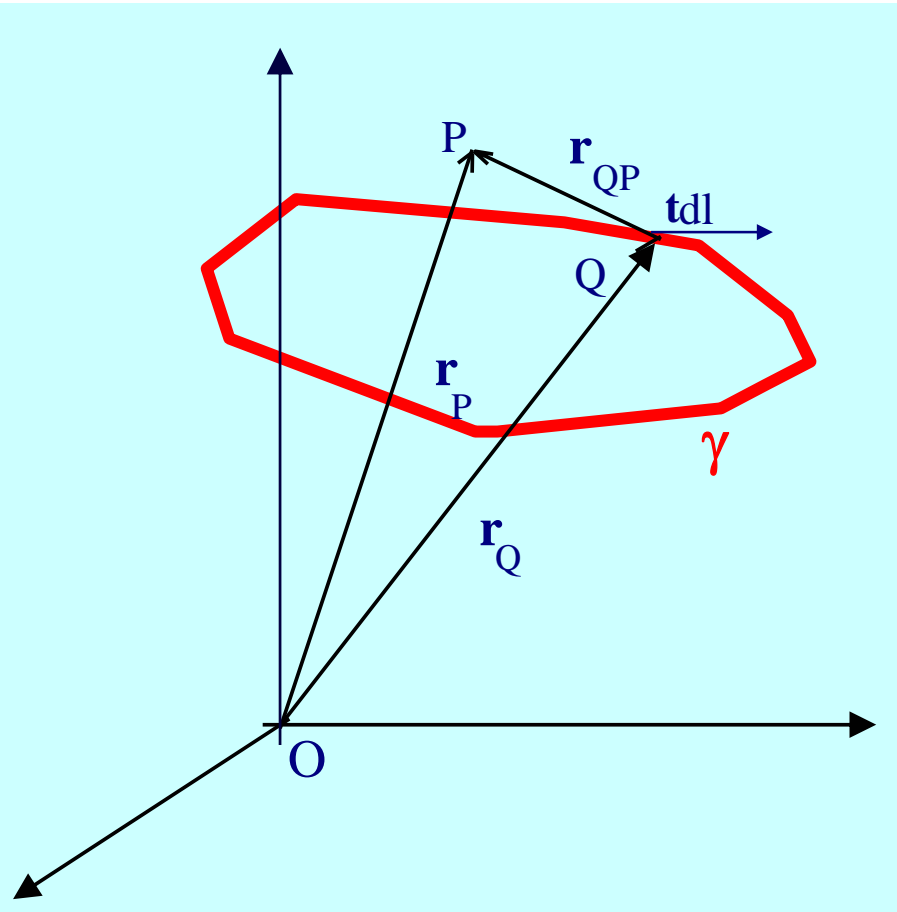
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Si tratta di tre equazioni scalari (di tipo Poisson) nelle tre proiezioni lungo gli assi coordinati:

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A}\right)_x = -\mu_0 J_x; \quad \left(\nabla^2 \mathbf{A}\right)_y = -\mu_0 J_y; \quad \left(\nabla^2 \mathbf{A}\right)_z = -\mu_0 J_z$$



**Nel caso di distribuzioni filiformi (è il caso più diffuso e significativo):**



$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{t}}{r_{QP}} dl$$

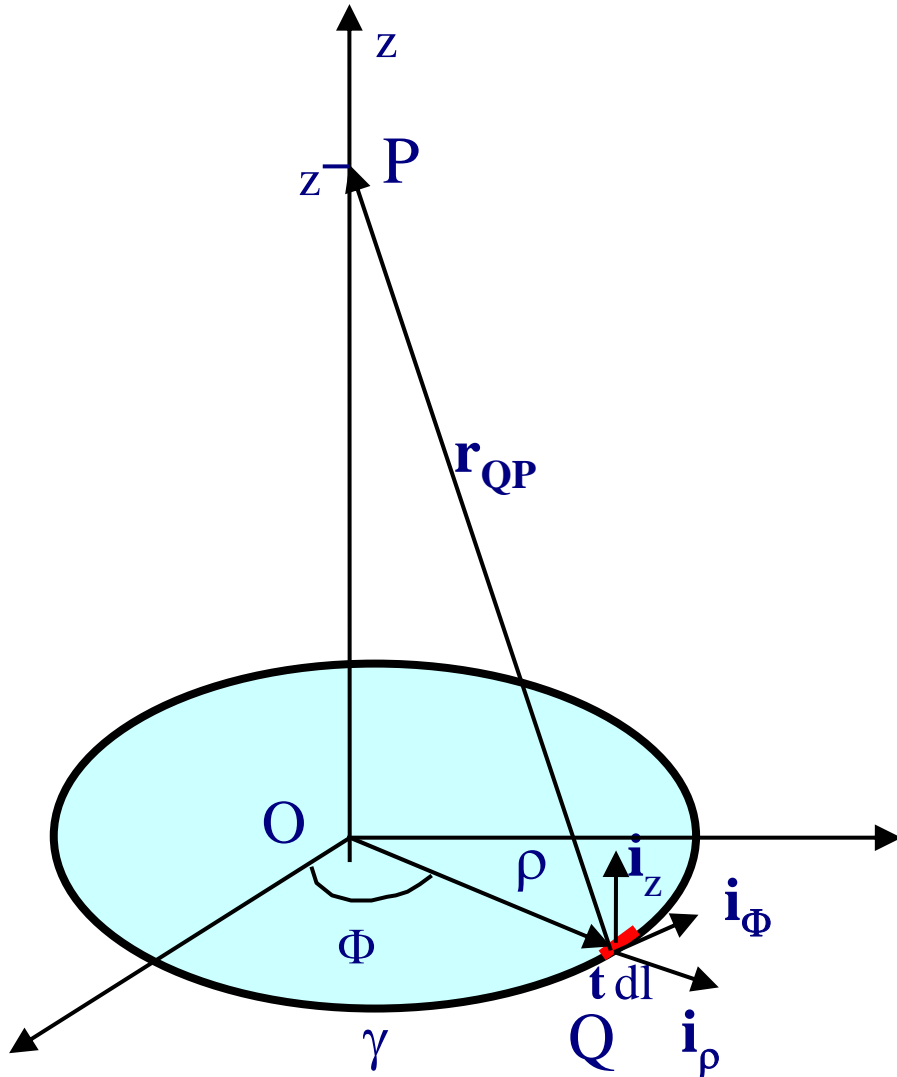
**Dalla conoscenza di A si ottiene B**

$$\mathbf{B}(P) = \nabla \times \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{t}}{r_{QP}} dl \right)$$

**Legge integrale di Laplace o di Biot-Savart**

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \left[ \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} \right) \right] dl$$

Calcoliamo  $\mathbf{B}$  sull'asse di una spira circolare:



$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \left[ \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} \right) \right] dl$$

$$dl = \rho d\Phi$$

$$\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = z\mathbf{i}_z - \rho\mathbf{i}_\rho$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{QP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_\rho & \mathbf{i}_\Phi & \mathbf{i}_z \\ 0 & \rho d\Phi & 0 \\ -\rho & 0 & z \end{vmatrix} =$$

$$= \rho z d\Phi \mathbf{i}_\rho + \rho^2 d\Phi \mathbf{i}_z$$

$$d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi [\rho^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} (\rho z d\Phi \mathbf{i}_\rho + \rho^2 d\Phi \mathbf{i}_z) = dB_\rho \mathbf{i}_\rho + dB_z \mathbf{i}_z$$

**i contributi alla componente lungo  $\rho$  di tratti simmetrici a  $180^\circ$  si elidono**

$$d\mathbf{B}(P) = dB_z \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi [\rho^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho^2 d\Phi \mathbf{i}_z$$

**e quindi integrando**

$$\mathbf{B}(P) = \oint_{\gamma} dB_z \mathbf{i}_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi [\rho^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho^2 d\Phi \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{2 [\rho^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \mathbf{i}_z$$

Ricordiamo che le leggi in termini integrali della magnetostatica sono:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n1} = B_{n2}$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds = \mu_0 NI \quad \Rightarrow \quad B_{t1} - B_{t2} = \mu_0 k_s$$

La circuitazione di  $\mathbf{B}$  su una curva chiusa  $\gamma$  non è in generale nulla e quindi l'integrale di linea di  $\mathbf{B}$  fra due punti  $A$  e  $B$  dipenderà dal percorso.



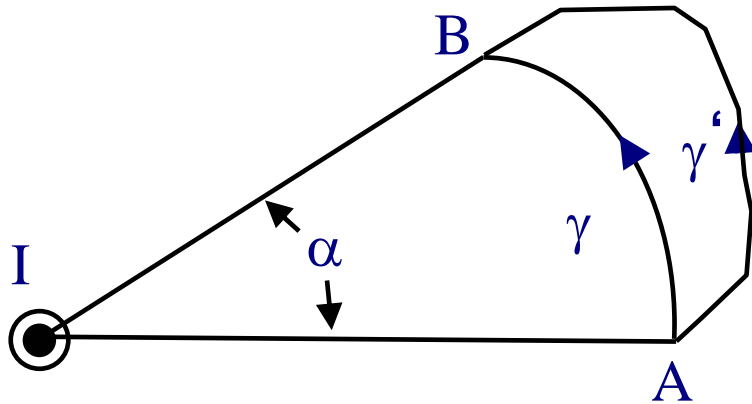
Si definisce pertanto tensione magnetica la

$$T_{A \gamma B} = \int_{A \gamma B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl$$

mentre si chiama forza magnetomotrice la:

$$f_{\gamma} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = NI$$





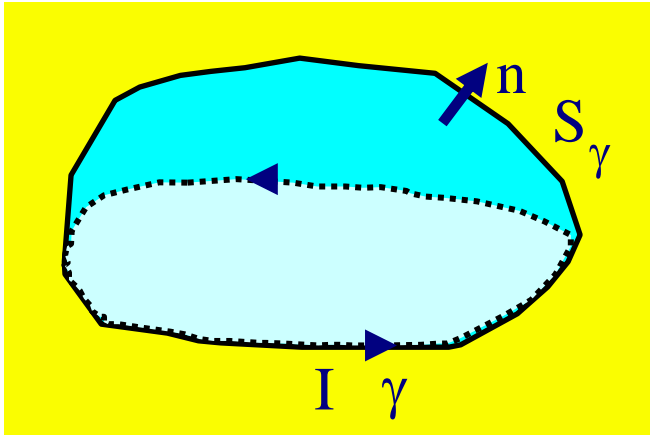
Nel caso di conduttore infinito percorso da corrente  $I$ , la tensione magnetica si calcola come:

$$T_{A\gamma B} = \int_{A\gamma B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r\alpha = \mu_0 I \frac{\alpha}{2\pi}$$

Poiché l'integrale lungo  $\gamma \cup \gamma'$  è nullo, qualunque sia  $\gamma$  purchè essa non concateni la corrente, si ha che, lontano dai conduttori, è possibile anche per il campo di induzione magnetica introdurre una funzione potenziale scalare dal quale è possibile ricavare il campo tramite un'operazione di gradiente.



Per un circuito filiforme si definisce coefficiente di autoinduzione:



$$L = \frac{\iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds}{I} = \frac{\iint_{S_\gamma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds}{I} = \frac{\oint_\gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl}{I}$$

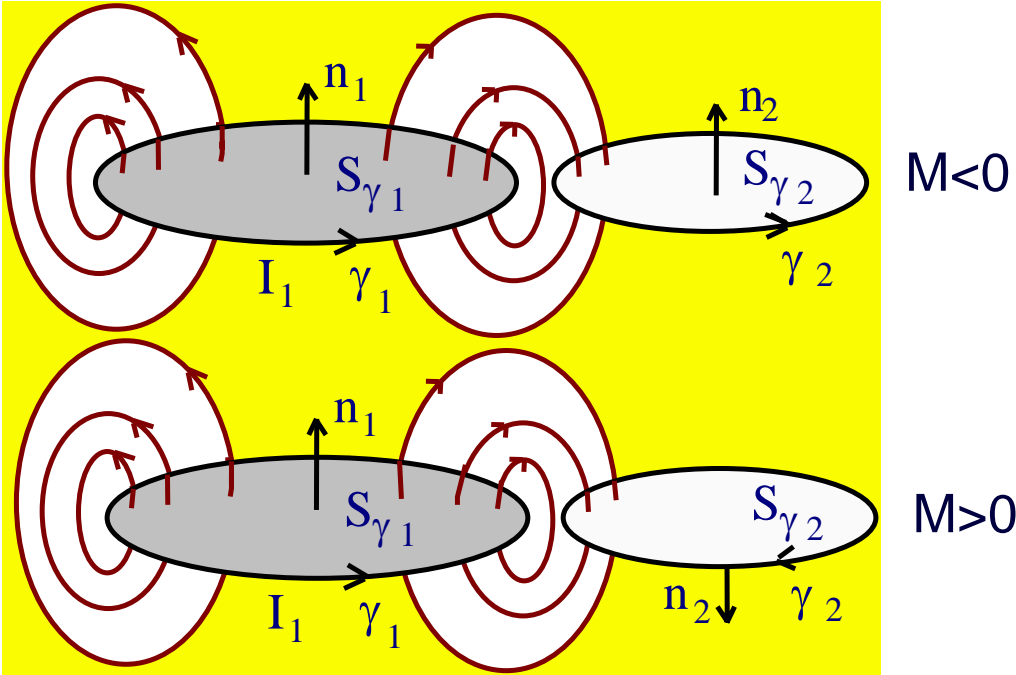
essendo

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{\mathbf{t}(Q) dl}{r_{PQ}}$$

si ha

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \left( \oint_\gamma \frac{\mathbf{t} dl}{r_{PQ}} \right) \cdot \mathbf{t} dl$$

In presenza di due conduttori filiformi si definiscono i coefficienti di mutua induzione



$$M_{12} = \frac{\iint_{S_{\gamma_2}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 ds}{I_1} = \frac{\oint_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_2 dl}{I_1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{\oint_{\gamma_2} \left( \oint_{\gamma_1} \frac{\mathbf{t}_1 dl}{r_{PQ}} \right) \cdot \mathbf{t}_2 dl}{I_1} = M_{21}$$



La circuitazione di  $\mathbf{B}$  su una curva chiusa  $\gamma$  non è in generale nulla e quindi l'integrale di linea di  $\mathbf{B}$  fra due punti A e B dipenderà dal percorso.

Si definisce pertanto tensione magnetica tra i punti A e B la:

$$T_{A \gamma B} = \int_{A \gamma B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl$$

mentre si chiama forza magnetomotrice la circuitazione sulla curva chiusa  $\gamma$

$$f_{\gamma} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dl = NI$$

