

**Note sui**

**Modelli per i campi  
elettrici e magnetici**

*note a cura del prof. Vincenzo Tucci*

**APRILE 2007**

# INDICE

<b>Definizione operativa del campo elettromagnetico</b>	<b>3</b>
<b>Densità di carica e corrente</b>	<b>4</b>
<b>Forma integrale delle Equazioni di Maxwell nel vuoto</b>	<b>6</b>
<b>Forma differenziale delle equazioni di Maxwell nel vuoto</b>	<b>9</b>
<b>Equazioni di Maxwell nei mezzi materiali</b>	<b>11</b>
<b>Relazioni costitutive</b>	<b>12</b>
Polarizzazione	12
Magnetizzazione	17
Conduzione	24
Elettrocinematica	25
<b>Modelli statici e quasi statici</b>	<b>28</b>
Modelli statici	28
Modelli Quasi Statici	29
<b>Soluzione di problemi di campo: equazioni di Laplace e Poisson</b>	<b>33</b>
<b>Unicità della soluzione</b>	<b>35</b>
<b>Metodi analitici</b>	<b>36</b>
Funzione di Green	36
Separazione delle variabili	38
<b>Metodi numerici</b>	<b>44</b>
Metodo delle differenze finite	44

## **Definizione operativa del campo elettromagnetico**

La definizione “operativa” di una grandezza fisica può essere effettuata indicando un procedimento per misurarla ed un opportuna unità di misura. Nello studio delle interazioni fra corpi carichi in moto si assume la visione, inizialmente introdotta da Faraday, nella quale si suppone lo spazio interessato da campi di forza<sup>1</sup>: in ogni punto dello spazio-tempo è definita una *coppia ordinata* di quantità vettoriali, il campo elettromagnetico,  $[\mathbf{E}(P,t), \mathbf{B}(P,t)]$ , anche se in quel punto non è presente alcuna carica. Questo campo è definito attraverso la forza, misurata in un sistema di riferimento inerziale, che si esercita nel punto  $P$  all'istante  $t$  su una carica  $q$  dotata di velocità  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F}(P,t) = q[\mathbf{E}(P,t) + \mathbf{v}(P,t) \times \mathbf{B}(P,t)] \quad (1)$$

La forza, detta di Lorentz, è somma di due termini entrambi proporzionali alla carica stessa: il primo termine non dipende dalla velocità della carica e pertanto può essere valutato considerando il valore della forza che si esercita sulla carica, tenuta ferma, in un certo punto ed in un dato istante. Chiamiamo questa forza, che si esercita su una carica unitaria (forza per unità di carica) ferma in  $P$ , campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Se invece consideriamo la stessa carica dotata di una velocità  $\mathbf{v}$  e la si fa passare per il punto  $P$  si misurerà una forza diversa dalla precedente. Se consideriamo la differenza fra il valore della forza con carica ferma e quello misurato quando essa si muove, si ottiene un nuovo valore della forza, dalla quale, conoscendo la carica e la velocità è possibile definire un nuovo campo che chiamiamo campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ .

In particolare, da questa definizione operativa le unità di misura di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  nel *Sistema Internazionale* risultano:

$$[\mathbf{E}] = \left[ \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \right] = \left[ \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{C} \cdot \text{s}^2} \right] \quad [\mathbf{B}] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{C} \cdot \text{s}} \right]$$

Nello studio dei fenomeni elettromagnetici l'interesse non è centrato sugli aspetti e sulle interazioni meccaniche, ma su quantità specifiche del settore. Risulta pertanto più conveniente far riferimento a delle unità di misura *ad hoc*. Avremo quindi

$$[E] = \left[ \frac{\text{Volt}}{\text{metro}} \right] = \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad [B] = \left[ \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right] = [\text{Tesla}] = [T]$$

Tali unità di misura derivano dalla applicazione di leggi integrali caratteristiche valide rispettivamente per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

<sup>1</sup> In alternativa a questa visione delle interazioni di natura elettromagnetica si parla di *azione a distanza*. Nell'ipotesi di un semplice sistema elettrostatico si suppone cioè che la forza che si esercita su una carica di prova sia dovuta alla somma delle forze dovuta all'azione di tutte le altre cariche presenti nel sistema.

## Densità di carica e corrente

Ricordiamo che sebbene la carica sia quantizzata (ovvero si può presentare solo sotto forma di aggregati della carica elementare  $|e|=1.6 \times 10^{-19}$  C), può essere comodo, nella maggior parte delle applicazioni, far riferimento ad una distribuzione continua (funzione del punto e del tempo) che chiamiamo **densità di carica** (di volume) e che indichiamo con  $\rho$ :

$$\rho(P,t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q(\Delta V)}{\Delta V}$$

dove  $\Delta V$  indica un volumetto elementare centrato in  $P$  e  $Q$  rappresenta la carica netta (somma algebrica delle cariche positive e negative) contenuta in esso; le dimensioni sono  $[C/m^3]$ . Il limite va inteso in senso fisico: il volumetto cioè deve essere sufficientemente piccolo rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema in esame ma sufficientemente grande rispetto alle dimensioni molecolari in modo da poter contenere una quantità non nulla di carica. La quantità di carica contenuta in un certo istante  $t$  all'interno di un volume  $V$  risulta data da:

$$Q(t) = \iiint_V \rho(P,t) dv$$

Si definisce poi **densità di corrente** (di volume) la quantità vettoriale

$$\mathbf{J}(P,t) = \rho(P,t)\mathbf{v}(P,t) = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- \quad (2)$$

nella quale si è messo in evidenza il contributo della densità di carica negativa e quello della carica positiva. Le dimensioni sono  $[C \cdot m/m^3 \cdot s] = [A/m^2]$  dove con A si indica l'Ampere=1Coulomb/s. In un conduttore metallico solo le cariche negative (elettroni di conduzione) possono muoversi, mentre le cariche positive (ioni) sono fissi all'interno del reticolo cristallino della struttura. E' da notare peraltro che in un conduttore (ad esempio metallico), interessato da una densità di corrente  $\mathbf{J}$  non nulla, la densità di carica risulta uguale a zero punto per punto. Infatti si ha:

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- \Rightarrow \begin{cases} \rho_+ = |\rho_-| \\ \mathbf{v}_+ = 0; \mathbf{v}_- \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \mathbf{J} = \rho_- \mathbf{v}_- \neq 0 \end{cases}$$

Ciò non accade in altri materiali interessati da fenomeni di trasporto di carica; ad esempio nei semiconduttori utilizzati nei dispositivi elettronici quali diodi, transistori, ecc., si può avere che risultino contemporaneamente diversi da zero sia la densità di corrente che la densità di carica. Inoltre, nella (2) le velocità rappresentano delle quantità medie (vettoriali) attribuibili punto per punto alle densità delle cariche in moto.

Si definisce intensità di densità di corrente o semplicemente corrente il flusso attraverso una superficie orientata  $S$  all'istante  $t$ :

$$i(t) = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} ds$$

essa rappresenta la carica netta che fluisce attraverso  $S$  nell'unità di tempo. Il segno di  $i$  dipende chiaramente, per una assegnata  $\mathbf{J}$ , dalla orientazione della normale  $\hat{n}$  alla superficie  $S$ . E' da notare che si può avere  $i=0$  pur essendo  $\mathbf{J} \neq 0$  su  $S$ : possiamo infatti pensare a superfici

(aperte o chiuse sulle quali  $\mathbf{J}$  abbia una distribuzione concorde con il verso di  $\hat{n}$  su alcune parti della superficie e discorde su altre.

Ai fini della valutazione dei campi a partire da tali sorgenti (densità di carica e di corrente) può essere utile in alcuni casi far riferimento a delle distribuzioni “idealizzate”, in cui si può ritenere che una o più dimensioni sono trascurabili rispetto alle altre. In particolare, si possono considerare densità di carica e corrente di tipo superficiale, quando lo spessore risulta trascurabile rispetto alla lunghezza ed alla larghezza di una piastra o filiforme quando la sezione è caratterizzata da una dimensione (ad esempio, il diametro nel caso di sezione circolare) trascurabile rispetto alla estensione longitudinale della distribuzione. Nel caso della densità di carica si ha che la carica rimane finita quando la sezione o lo spessore tendono a zero. Si introducono la densità di carica filiforme  $\lambda$  e quella superficiale  $\sigma$  (**Figura 1**):

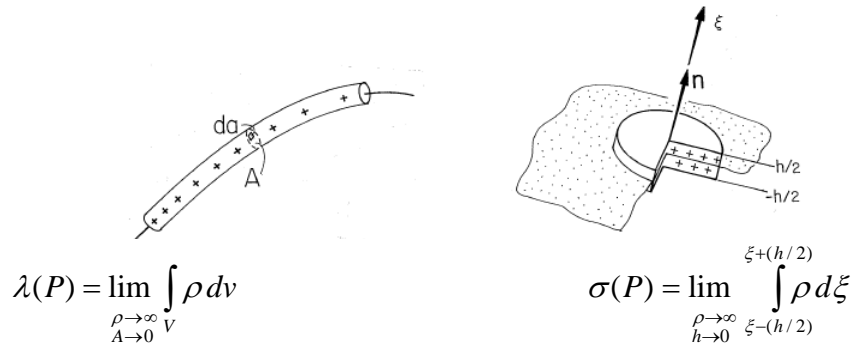


Figura 1

Inoltre, una carica puntiforme  $q$  può essere vista come una densità  $\delta$  infinita concentrata in un volume di dimensioni infinitesime<sup>2</sup>

$$q(P) = \lim_{\rho \rightarrow \infty, V \rightarrow 0} \int_V \delta dv$$

In maniera duale si possono quindi introdurre le densità di corrente superficiale e filiforme (**Figura 2**):

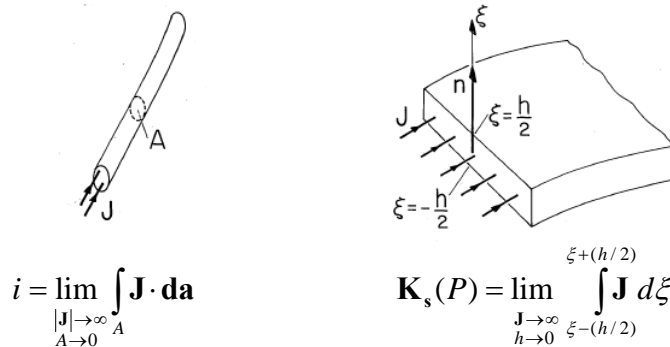


Figura 2

<sup>2</sup> Si può pensare a tale distribuzione, in analogia all’impulso di Dirac nel dominio del tempo, come un impulso di densità di carica nello spazio.

## Forma integrale delle Equazioni di Maxwell nel vuoto

Le leggi, note come equazioni di Maxwell, che governano il campo elettromagnetico nel vuoto sono:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_{\Sigma}} \rho dV \quad \text{legge di Gauss (per il campo elettrico)} \quad (3)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Faraday-Neumann} \quad (4)$$

$$\oiint_{\Sigma(t)} \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \text{legge di Gauss (per il campo magnetico)} \quad (5)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{t} dl = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Ampère-Maxwell} \quad (6)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS = - \iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{legge di conservazione della carica} \quad (7)$$

Il sistema di equazioni (3)-(7) insieme alla (1) costituisce il Modello Fondamentale dell'Elettromagnetismo (MFE). Nel sistema di equazioni (3)-(6), due equazioni riguardano i flussi su superfici chiuse e due concernono le circuitazioni dei due campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ; la quinta equazione lega fra loro quelle che possiamo ritenere *le sorgenti* di tali campi, ovvero le cariche ferme ed in moto.

La costante  $\epsilon_0$  è la permittività del vuoto che nel S.I. di misura risulta pari a  $8.854 \cdot 10^{-12}$  F/m,  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto che nel S.I. vale  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m. Il Farad (F) rappresenta l'unità di misura della capacità  $1F=1C/1V$ ; l'Henry (H) è l'unità nella quale nel S.I. viene misurata l'induttanza, ovvero il rapporto fra il flusso del vettore induzione magnetica e la corrente e la corrente  $1H=1Wb/1A$ .

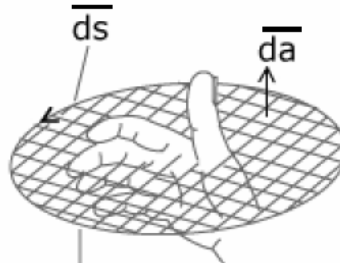
La (3) esprime il fatto che comunque presa una superficie chiusa  $\Sigma$  dotata di normale orientata verso l'esterno libera di muoversi e deformarsi senza strappi, *il flusso*<sup>3</sup> del campo elettrico su  $\Sigma$  risulta pari, istante per istante, a meno di una costante, dipendente dal sistema di unità di misura prescelto, alla carica netta totale in essa contenuta.  $V_{\Sigma}$  rappresenta infatti il volume racchiuso da  $\Sigma$ .

Il contenuto di informazione della (5) risulta analogo alla (3): possiamo pertanto affermare che, a causa del fatto che comunque si scelga  $\Sigma$  il flusso di  $\mathbf{B}$  risulta sempre nullo, *non*

<sup>3</sup> L'operazione di flusso di un vettore consiste nel valutare punto per punto sulla superficie considerata il prodotto fra la componente normale del vettore (nel punto) e l'elementino di area  $dS$  e nel considerare la somma (integrale) degli infiniti termini così ottenuti.

esistono cariche magnetiche. Un campo che gode di questa proprietà si dice **campo solenoidale**.

La legge di Faraday-Neumann esprime il fatto che comunque presa una linea chiusa orientata  $\gamma$ , **la circuitazione**<sup>4</sup> del campo elettrico su  $\gamma$  risulta pari all'opposto della derivata temporale del flusso del campo di induzione magnetica su una qualsiasi superficie  $S_\gamma$  orlata da  $\gamma$ . La superficie è necessariamente aperta e la sua normale risulta legata al versore tangente a  $\gamma$  dalla *regola del cavatappi* o *della mano destra* (**Figura 3**).



**Figura 3**

Naturalmente se scegliessimo una convenzione diversa, ad esempio fissata l'orientazione del versore tangente, orientassimo il versore normale in verso opposto, nella (4) scomparirebbe il segno meno.

In maniera analoga si procede per la legge di Ampère-Maxwell, nella quale la circuitazione su  $\gamma$  del campo  $\mathbf{B}$  risulta pari, a meno della costante  $\mu_0$ , alla variazione del flusso sulla superficie  $S_\gamma$  del flusso della somma del campo di densità di corrente  $\mathbf{J}$  e del termine  $\partial \epsilon_0 \mathbf{E} / \partial t$ , chiamato **densità di corrente di spostamento**. Spesso la somma di questi due campi viene indicata come **densità di corrente totale** e la si indica con  $\mathbf{G}$ . Naturalmente, entrambe le leggi sulla circuitazione dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  valgono in ogni istante di tempo e per qualunque coppia curva  $\gamma$  superficie orlata  $S_\gamma$  entrambe libere di muoversi e deformarsi senza strappi.

E' bene precisare che non è un caso che si abbiano due coppie di leggi, una per il flusso ed una per la circuitazione, rispettivamente per il campo elettrico e l'induzione magnetica. Esiste infatti un teorema fondamentale (di unicità) della teoria dei campi, che va sotto il nome di **teorema di Helmholtz**, che ci assicura che se in un certo dominio spaziale chiuso  $\Omega$  si conoscono il flusso di un campo vettoriale esteso ad una qualunque superficie chiusa contenuta in  $\Omega$  e la circuitazione estesa ad una qualunque linea chiusa contenuta nella regione e se inoltre si conosce la componente tangente del campo sulla superficie chiusa che delimita il dominio  $\Omega$  (condizione al contorno), allora esiste uno e un solo campo vettoriale che soddisfa alle due leggi ed alla condizione al contorno assegnata. Se non si precisa la condizione al contorno il campo non è univocamente determinato: esisteranno cioè infatti infiniti campi che soddisfano le due leggi relative al flusso ed alla circuitazione ma ognuno di

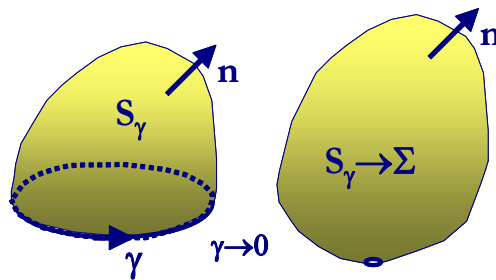
<sup>4</sup> L'operazione di circuitazione di un vettore si effettua considerando punto per punto della curva il prodotto tra la componente tangente del vettore per l'elementino  $dl$  e sommando quindi gli infiniti termini così ottenuti.

essi sarà caratterizzato da un diverso valore della componente tangente sulla superficie.

L'equazione (7) lega fra loro *le sorgenti* dei campi: in particolare si osserva che tali sorgenti non possono essere assegnate ad arbitrio in quanto esse devono soddisfare l'equazione di conservazione della carica. Si osserva infatti che il flusso uscente di  $\mathbf{J}$  da una superficie chiusa  $\Sigma$  risulta pari alla variazione nell'unità di tempo della carica contenuta all'interno di  $\Sigma$ .

Osserviamo che non tutte le equazioni (3) - (7) sono indipendenti.

In particolare, se applichiamo la legge di Faraday-Neumann e consideriamo una curva  $\gamma$  che facciamo contrarre fino a farla diventare un punto, la superficie aperta  $S_\gamma$  diventerà una superficie chiusa  $\Sigma$  (in maniera analoga al processo con il quale otteniamo un palloncino, vedi **Figura 4**). Il primo membro della (4) tenderà a zero e così pure il secondo membro. Avremo quindi che il flusso su  $\Sigma$  di  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  è nullo ovvero, integrando nel tempo, che il flusso di  $\mathbf{B}$  è costante. La (5) può pertanto essere vista come una sorta di condizione iniziale in quanto essa ci assicura che il flusso del vettore induzione magnetica era nullo inizialmente e quindi permarrà tale per ogni  $t$ .



**Figura 4**

In maniera analoga si può ragionare per la legge di Ampère-Maxwell. Si può mostrare infatti in questo caso che il vettore  $\mathbf{G}$ , densità di corrente totale prima definito, risulta solenoidale (il suo flusso su una superficie chiusa è nullo). D'altra parte, per la legge di conservazione della carica (7), il flusso di  $\mathbf{J}$  è pari alla variazione della carica contenuta all'interno della superficie  $\Sigma$ . Considerando il legame, espresso dalla legge di Gauss, fra il flusso del campo elettrico e la carica contenuta all'interno di una superficie chiusa, la (3) può pertanto essere vista come una condizione iniziale che fornisce una informazione sulla quantità di carica inizialmente presente nel sistema in esame.



## Forma differenziale delle equazioni di Maxwell nel vuoto

Oltre alle leggi integrali, è possibile introdurre una descrizione del campo elettromagnetico in forma locale:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (3')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (6')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7')$$

Nelle (3')-(7') sono introdotti due operatori vettoriali differenziali che vanno sotto il nome di **divergenza** (*div*) e **rotore** (*rot*). Anche se non espressamente indicato tutte le grandezze sono funzioni dello spazio e del tempo.

Si chiama divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$  il limite, se esiste:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P;t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Sigma} \mathbf{A}(P;t) \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta\tau}$$

L'operazione consiste nel valutare il rapporto fra il flusso uscente di  $\mathbf{A}$  su una superficie chiusa  $\Sigma$  centrata in  $P$  e il volumetto  $\Delta\tau$  contenuto in  $\Sigma$  nel limite per  $\Delta\tau$  che tende a zero. Se tale limite esiste ed è finito, esso rappresenta la divergenza di  $\mathbf{A}$  in  $P$ . Si può notare che l'operatore di divergenza trasforma un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  in uno scalare  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ .

Il rotore di un campo  $\mathbf{A}$  nel punto  $P$  è un operatore vettoriale lineare che trasforma un campo vettoriale in un altro campo vettoriale,  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ . Per definirlo si prenda un punto  $P$  e si considerino una superficie aperta  $S$  passante per  $P$  e la curva  $\gamma$  che rappresenta l'orlo di tale superficie con le orientazioni dei versori (normale  $\mathbf{n}$  alla superficie e tangente  $\mathbf{t}$  alla curva) assunte secondo la regola del cavatappi. Consideriamo il rapporto fra la circuitazione di  $\mathbf{A}$  su  $\gamma$  e la superficie  $S$  (tenendo fissa la normale  $\mathbf{n}$  a  $S$ ) nel limite per  $S$  che tende a zero. Se tale limite esiste ed è finito esso rappresenta la componente del vettore  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  secondo la direzione  $\mathbf{n}$ . Al variare di  $\mathbf{n}$  otteniamo le varie componenti che definiscono univocamente il campo  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  nel punto  $P$ .

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}(P;t))_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} \mathbf{A}(P;t) \cdot \mathbf{t} dl}{S}$$

Il passaggio dalla forma integrale a quella differenziale per le due leggi che riguardano la circuitazione (di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ), può avvenire mediante l'applicazione del teorema di Stokes:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell = \iint_{S_{\gamma}} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

mentre le due leggi che riguardano il flusso (di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ) può avvenire mediante l'applicazione del teorema di Gauss (o della divergenza):

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div} \mathbf{A} dV$$

La scrittura in forma locale è chiaramente più debole di quella integrale, in quanto è necessario richiedere la derivabilità dei campi anziché la loro integrabilità. Pertanto, mentre le leggi integrali si possono sempre applicare (è possibile infatti anche che i campi presentino discontinuità), quelle locali si possono applicare solo nelle regioni di regolarità (dove le funzioni sono derivabili). D'altra parte, la formulazione locale risulta molto *comoda* per illustrare una serie di proprietà dei campi e pertanto viene largamente utilizzata.

## Equazioni di Maxwell nei mezzi materiali

Le equazioni in forma integrale del campo elettromagnetico nei mezzi materiali sono:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{V_{\Sigma}} \rho_{lib} dV \quad \text{legge di Gauss (per il campo elettrico)} \quad (8)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \hat{t} dl = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Faraday-Neumann} \quad (9)$$

$$\oiint_{\Sigma(t)} \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \text{legge di Gauss (per il campo magnetico)} \quad (10)$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \hat{t} dl = \iint_{S_{\gamma}} \left( \mathbf{J}_{lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS \quad \text{legge di Ampère-Maxwell} \quad (11)$$

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{J}_{lib} \cdot \hat{n} dS = - \iiint_{V_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} dV \quad \text{legge di conservazione della carica} \quad (12)$$

mentre le equazioni in forma differenziale nei mezzi materiali sono:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \quad (8')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (10')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \left( \mathbf{J}_{lib} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (11')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{lib} = - \frac{\partial \rho_{lib}}{\partial t} \quad (12')$$

Nelle formulazioni riguardanti i mezzi materiali sono stati introdotti due nuovi campi  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  che prendono rispettivamente il nome di vettore *spostamento* o *densità di flusso elettrico* e *campo magnetico*. Tali campi sono evidentemente legati a quelli “principali”  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  da opportune relazioni costitutive specifiche dei diversi materiali in cui si sviluppa il fenomeno elettromagnetico in esame,  $\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{B})$ .

L'introduzione di tali nuovi campi consente di considerare le sole densità di carica e di corrente “libere”, ovvero modificabili agendo su opportuni “generatori esterni”. Tale attributo consente di distinguerle da quelle legate ai fenomeni di polarizzazione e magnetizzazione che si manifestano come risposta di alcune classi di materiali all'applicazione di campi esterni.

## Relazioni costitutive

### Polarizzazione

Nei materiali dielettrici le cariche non sono libere di muoversi liberamente, ma sono legate da forze finite che consentono, in presenza di un campo esterno, solo uno spostamento del loro baricentro rispetto alla posizione indisturbata, come rappresentato nella **Figura 5a** per il semplice caso dell'atomo di idrogeno.

L'alterazione nelle posizioni di equilibrio delle cariche contribuisce comunque alla distribuzione del campo elettrico totale. Per tener conto di tale fenomeno si considera il dipolo elettrico formato da una coppia di cariche di ugual valore e di segno opposto, separate da una distanza  $d$  (**Figura 5b**). Tale struttura viene caratterizzata da una grandezza vettoriale, detta momento di dipolo  $\mathbf{p}=q\mathbf{d}$  in cui la distanza  $\mathbf{d}$  è orientata dalla carica negativa a quella positiva.

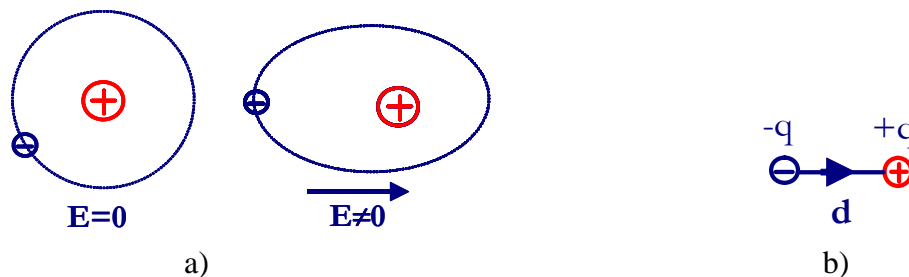


Figura 5

La deformazione delle strutture elementari (atomi, molecole) costituenti tali materiali viene detta *polarizzazione*. E' possibile distinguere tra *polarizzazione per deformazione*, come quella dell'atomo di idrogeno, in cui l'effetto si annulla quando viene rimosso il campo elettrico esterno. In altri materiali, come per esempio l'acqua (vedi **Figura 6**), la conformazione molecolare è tale da presentare una disposizione in cui i baricentri delle cariche positive e negative non coincidono, ovvero presentano un momento dipolare intrinseco. In assenza di campo elettrico applicato, i dipoli sono orientati in modo casuale, mentre, in presenza di un campo esterno, questi tendono ad orientarsi nella direzione di questo. Si parla in tal caso di *polarizzazione per orientamento*.

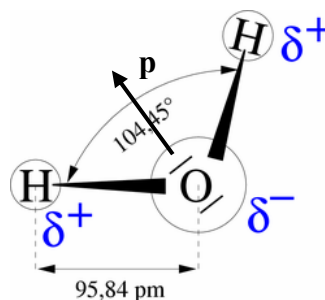
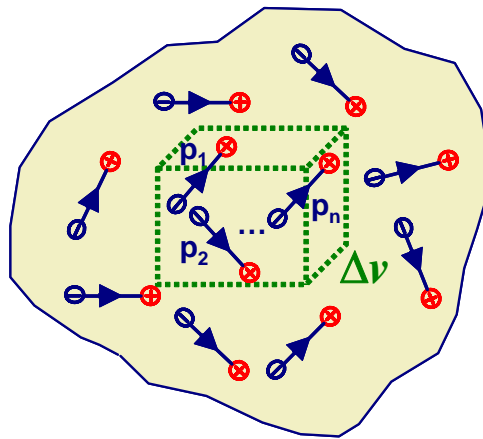


Figura 6

In ogni caso, al fine di portare in conto le cariche dovute alla polarizzazione, si può adottare, analogamente a quanto si fa nel caso della distribuzione di carica associata alle singole cariche puntiformi, una descrizione in termini di una grandezza “macroscopica” continua. Considerato, pertanto, un volumetto  $\Delta v$  centrato in un punto  $P$  del materiale dielettrico contenente  $N$  dipoli elementari  $\mathbf{p}_k$  (**Figura 7**), si definisce intensità di polarizzazione  $\mathbf{P}$  (o semplicemente polarizzazione) il vettore:

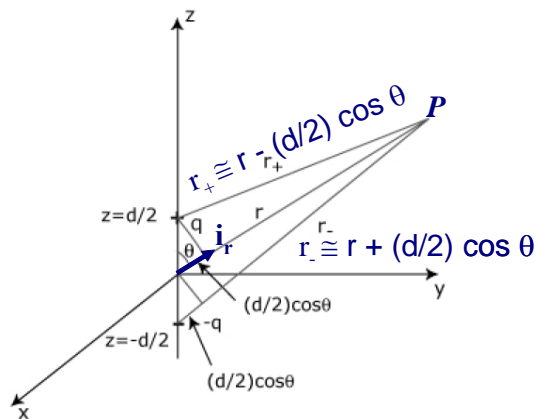
$$\mathbf{P}(P) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k}{\Delta v} = N \langle \mathbf{p} \rangle$$

dove  $\langle \mathbf{p} \rangle$  rappresenta il momento dipolare medio associato al volumetto.



**Figura 7**

Per verificare l'effetto prodotto dalla polarizzazione possiamo calcolare il potenziale ed il campo elettrico dovuto ad un dipolo elementare. A tal fine si considera un dipolo centrato nell'origine  $O$  degli assi coordinati, diretto lungo l'asse  $z$  e si valuta il potenziale in un punto  $P$  posto ad una distanza  $r$  (**Figura 8**). Indicate rispettivamente con  $r_+$  e  $r_-$  le distanze da  $P$  della carica positiva e negativa, il potenziale si può scrivere come somma dei due contributi:



**Figura 8**

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right] \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{qd \cos \theta}{r^2} \right]$$

da cui, considerando il versore  $\mathbf{i}_r$ , si osserva che il potenziale di un dipolo elettrico risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza (e non alla distanza come nel caso della singola carica puntiforme):

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} \right]$$

Una distribuzione continua di dipoli in un volume  $dv'$ , centrata nel punto  $P'$  e caratterizzata da una polarizzazione  $\mathbf{P}$  (**Figura 9**), darà luogo ad un contributo elementare al potenziale nel punto P data da:

$$d\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(P') \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} dv'$$

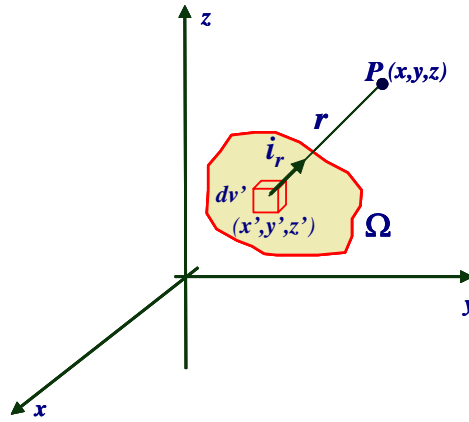


Figura 9

e quindi, per il volume  $\Omega$ :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_r}{r^2} dv'$$

Osservando che<sup>5</sup>:

$$\frac{\mathbf{i}_r}{r^2} = \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2} \right\} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ [(\dots)]^{1/2} \right\} \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ [(\dots)]^{1/2} \right\} \mathbf{i}_z$$

si può porre:

<sup>5</sup> Si osservi che l'operazione di derivazione è effettuata rispetto alle coordinate del punto  $P'$  in cui è centrato il volumetto  $dv'$ , e non su quelle del punto P. Nell'ipotesi in cui le derivate siano effettuate rispetto alle coordinate

di P, si avrebbe:  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{i}_r}{r^2}$ .

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) dv'$$

Utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla f \cdot \mathbf{A},$$

dove  $f$  è una funzione scalare e  $\mathbf{A}$  un campo vettoriale, il precedente integrale si può riscrivere come:

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \iiint_{\Omega} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) dv' - \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} dv' \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oiint_{\Sigma(\Omega)} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{n}}{r} ds - \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} dv' \right\}$$

Confrontando questa espressione con quella che fornisce (integrale di sovrapposizione) il potenziale di una distribuzione di carica caratterizzata da una densità volumetrica  $\rho$  ed una densità superficiale  $\sigma$

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oiint_{\Sigma(\Omega)} \frac{\sigma ds}{r} + \iiint_{\Omega} \frac{\rho dv'}{r} \right\}$$

si può scrivere rispettivamente nei punti interni regolari e sulla frontiera del dominio:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

$$\mathbf{P} \cdot \hat{n} = \sigma_{pol}$$

A tale risultato è possibile pervenire anche mediante un diverso approccio. Si consideri infatti un materiale contenente  $N$  dipoli per unità di volume. E' possibile calcolare quale sia la carica netta contenuta all'interno di una superficie chiusa  $S$  di volume  $V$ . Chiaramente, a causa della polarizzazione, alcuni centri di carica possono risultare spostati all'esterno della superficie  $S$  lasciando, pertanto, delle cariche non neutralizzate all'interno. Al fine di determinare la carica presente all'interno di  $V$  supponiamo che la carica positiva sia esterna alla superficie e consideriamo le particelle cariche di un elemento  $da$  della superficie (**Figura 10**). Tutti i centri di carica positivi contenuti nel volumetto  $dv = d \times da$  contribuiscono a lasciare una carica negativa all'interno di  $V$  pari a  $dQ_{pol} = -Nq \times d \times da$  pertanto integrando sull'intera superficie si ottiene:

$$Q_{pol} = \oiint_S -Nq d da = \oiint_S -\mathbf{P} \cdot \hat{n} da$$

e, pertanto, introducendo una densità di carica di polarizzazione  $\rho_{pol}$  si potrà scrivere:

$$Q_{pol} = \iint_S \mathbf{P} \cdot \hat{n} da = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv = \iiint_V \rho_{pol} dv \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

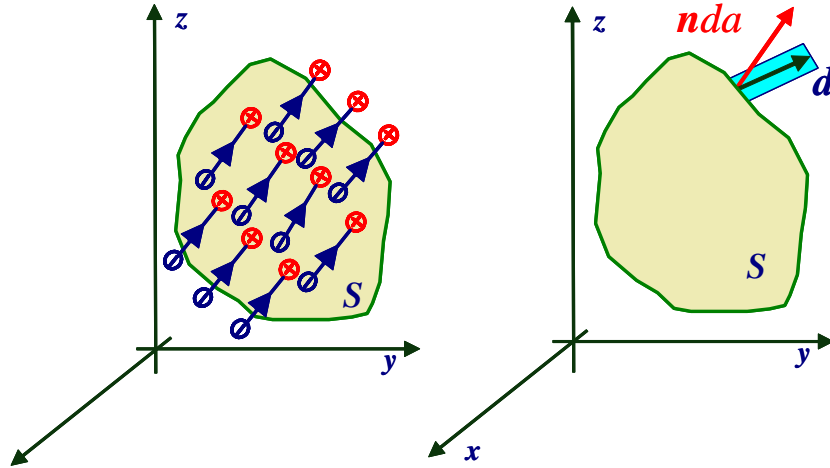


Figura 10

Poiché tra le sorgenti del campo  $\mathbf{E}$  occorre considerare, oltre alla densità di carica libera anche quella di polarizzazione, si potrà scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} - \nabla \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Il vettore  $\mathbf{D}$  così introdotto prende il nome di densità di flusso o spostamento elettrico.

Per quanto riguarda il legame di  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{E}$ , si possono distinguere i materiali in cui  $\mathbf{P}$  è indipendente dal campo elettrico (si parla in tal caso di elettretti, in analogia con i magneti) ed i materiali in cui la polarizzazione dipende da  $\mathbf{E}$ . In molti materiali dielettrici di interesse applicativo il legame risulta essere lineare, indipendente dal punto in esame (materiali omogenei) ed indipendente dalla direzione e verso di  $\mathbf{E}$  (materiali isotropi):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

La relazione costitutiva del mezzo diventa, quindi:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

nella quale si è utilizzata la costante dielettrica o permittività relativa del materiale  $\epsilon_r$ .

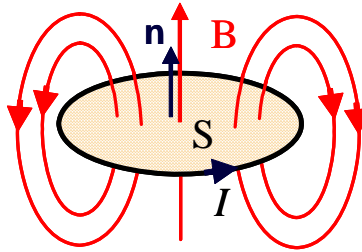


## Magnetizzazione

Una spira percorsa da una corrente  $I$  produce un campo magnetico che si concatena con tale corrente. La spira (**Figura 11**) costituisce un dipolo magnetico a cui è possibile associare un momento di dipolo definito come

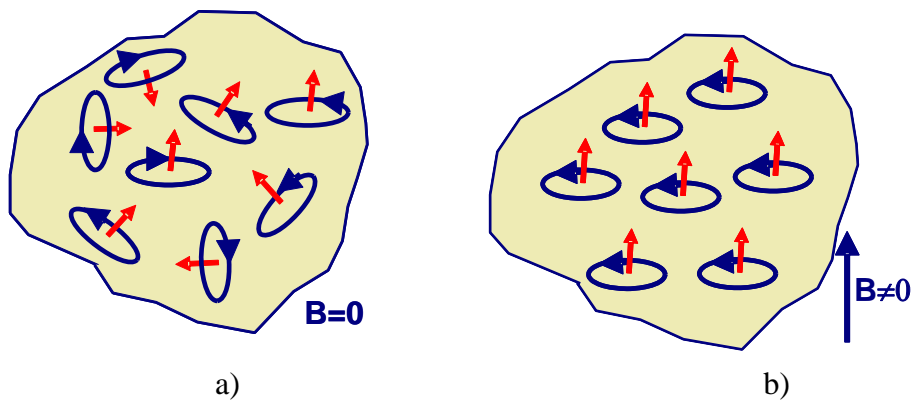
$$\mathbf{m} = S I \mathbf{n}$$

dove  $S$  è l'area della superficie orlata dalla spira.



**Figura 11**

Ogni atomo a causa della rotazione degli elettroni negli orbitali atomici è sede di un campo magnetico interno che può essere considerato simile a quello prodotto da una spira elementare interessata da una corrente  $I$ . Nei materiali magnetizzabili (in larga parte costituiti da leghe di ferro), in assenza di un campo magnetico esterno, i singoli dipoli magnetici sono orientati in maniera casuale e, pertanto l'effetto globale è nullo (**Figura 12a**). Applicando un campo esterno, i dipoli tendono ad orientarsi parallelamente a questo (**Figura 12b**), dando così luogo ad una alterazione del campo totale.



**Figura 12**

Per tener conto di questo fenomeno si introduce una descrizione in termini di una quantità macroscopica continua detta intensità di magnetizzazione. Si considera, pertanto un volumetto di materiale  $\Delta v$  centrato in  $P$  all'interno del quale si suppongono presenti  $N$  dipoli magnetici e si effettua il limite:

$$\mathbf{M}(P) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta v} = N \langle \mathbf{m} \rangle$$

L'intensità della magnetizzazione dipende dalle correnti elementari che, peraltro, possono essere portate in conto introducendo una densità di corrente molecolare:

$$\mathbf{J}_{mol} : \mathbf{J}_{mol} \cdot \mathbf{n} ds = dI_{mol}$$

La relazione fra la densità di corrente molecolare e l'intensità di magnetizzazione  $\mathbf{M}$  può essere determinata considerando una curva  $\gamma$  interna al materiale e una generica superficie aperta  $S_\gamma$  avente  $\gamma$  come bordo. La corrente molecolare totale che interessa tale superficie è data da tutte quelle associate alle spire elementari di tipo **b** che concatenano  $\gamma$ . Infatti, a differenza di quelle di tipo **a** che attraversano in due punti ed in verso opposto la superficie  $S_\gamma$ , dando pertanto contributo netto nullo, le spire di tipo **b** attraversano la superficie una sola volta (**Figura 13**) con un contributo positivo o negativo a seconda che esse risultino concordi o discordi rispetto alla normale  $\mathbf{n}$ . Le correnti in un tratto  $dl$  della curva  $\gamma$  saranno quelle contenute nel cilindro avente di volume  $dv$ , avente altezza  $dl$  e sezione  $dS$ . Assumendo una densità pari a  $N$  si ottiene:

$$dI_{mol} = N I \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} dl = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl \quad \Rightarrow \quad I_{mol} = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl$$

e applicando il teorema di Stokes si ha:

$$I_{mol} = \oint_{\gamma} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} dl = \iint_{S_\gamma} \nabla \times \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{S_\gamma} \mathbf{J}_{mol} \cdot \mathbf{n} ds$$

ovvero nei punti regolari e sulle superfici di discontinuità si avrà rispettivamente:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{mol}$$

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \mathbf{K}_{S_{mol}}$$

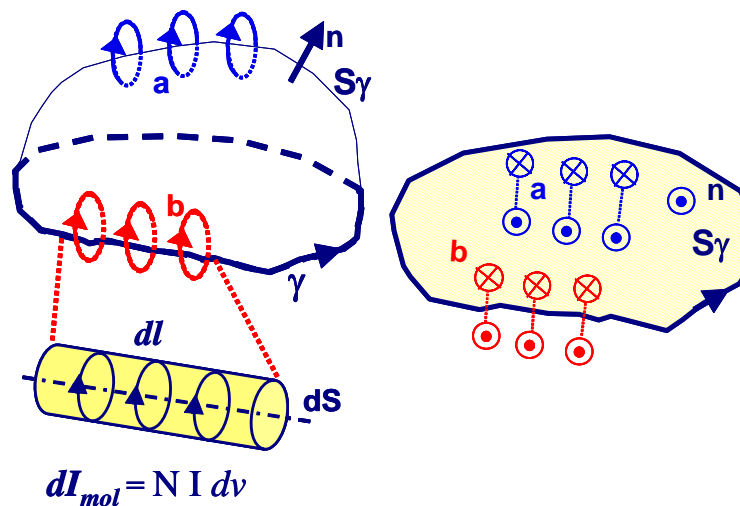


Figura 13

Queste correnti molecolari costituiscono delle sorgenti a tutti gli effetti del campo di induzione magnetica. Si può pertanto porre:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{J}_{lib} + \mathbf{J}_{mol}) = \mu_0\mathbf{J}_{lib} + \mu_0\nabla \times \mathbf{M}\end{aligned}$$

Ponendo:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

si potrà esprimere una relazione tra il vettore  $\mathbf{H}$  detto campo magnetico (la cui unità di misura è [A/m]) e le sole correnti libere:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib}$$

Il modello della magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzabili diventa dunque:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{lib} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})\end{aligned}$$

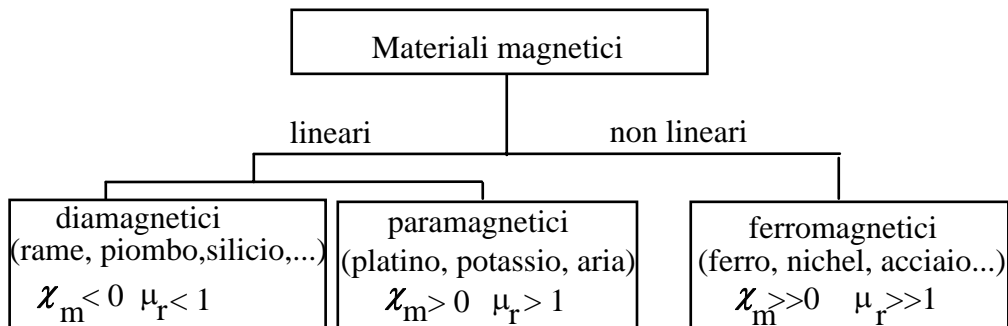
I materiali per cui si ha  $\mathbf{M}=\mathbf{M}_0$  sono detti magneti (a magnetizzazione rigida). Per materiali lineari ed isotropi si ha:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r \mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

Per tali materiali si ha:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{M} &= \nabla \times \chi_m \mathbf{H} = \chi_m \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \nabla \chi_m = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{M} &= \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{H} = 0\end{aligned}$$

In generale, i materiali magnetici possono essere classificati come mostrato in **Figura 14**.



**Figura 14**

### Materiali diamagnetici

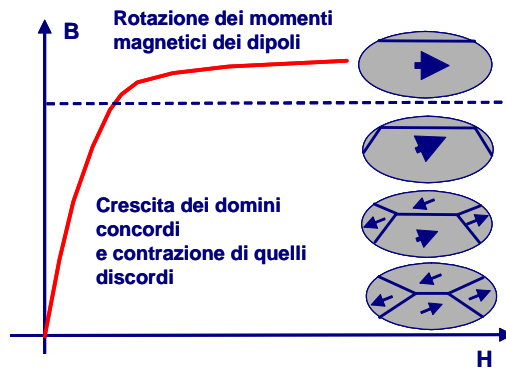
In tali materiali non esistono dipoli magnetici permanenti e l'applicazione di un campo di induzione esterno crea dei dipoli con momento di verso opposto a quello applicato e quindi tali da indebolire B. I valori di permeabilità relativa e suscettività risultano  $\mu_r \approx 1$ ,  $|\chi_m| \approx 10^{-6}$ ; appartengono a tale insieme rame, argento, stagno, zinco.

### Materiali paramagnetici

In tali materiali il campo magnetico all'interno del materiale viene rafforzato (debolmente) in presenza di un campo esterno dalla presenza di dipoli magnetici permanenti a livello atomico che passano da una configurazione casuale ad una ordinata nel verso del campo. I valori di permeabilità relativa e suscettività risultano  $\mu_r \approx 1$ ,  $|\chi_m| \approx 10^{-6}$ - $10^{-2}$ ; appartengono a tale insieme alluminio, calcio, platino, ossigeno.

### Materiali ferromagnetici

Un rilievo particolare per le applicazioni alle macchine elettriche è assunto dai materiali ferromagnetici. A tale classe appartengono il ferro, il cobalto ed il nichel e leghe ottenute da questi. Il campo magnetico all'interno del materiale viene rafforzato (notevolmente) a causa della presenza di dipoli magnetici permanenti raggruppati in domini (detti di Weiss) che per  $B=0$  sono orientati in maniera casuale, mentre, al crescere del campo applicato, aumentano di dimensioni e si allineano con il campo esterno. La caratteristica di prima magnetizzazione, quella cioè che si ottiene su un materiale "vergine", assume gli andamenti qualitativi mostrati in **Figura 15**.



**Figura 15**

I valori di permeabilità relativa massima, valutati nel primo tratto quasi lineare della caratteristica possono essere dell'ordine di  $10^3$ - $10^6$ . Al disopra di un certo valore, detto di saturazione, la caratteristica diventa di fatto lineare con una dipendenza  $\Delta B/\Delta H = \mu_0$ . Se il campo  $H$  viene fatto decrescere l'induzione non segue più lo stesso andamento assunto nella curva di prima magnetizzazione, ma mostra valori più elevati. Per  $H=0$  si ha  $B \neq 0$  e tale valore si chiama induzione residua  $B_r$ . Per riportare a zero il valore dell'induzione occorre applicare un campo magnetico di valore negativo, detto campo coercitivo  $H_c$ . Sottoponendo il materiale ad una magnetizzazione variabile in maniera periodica (ad esempio, sinusoidale), la caratteristica esibisce il cosiddetto ciclo di isteresi (**Figura 16**).

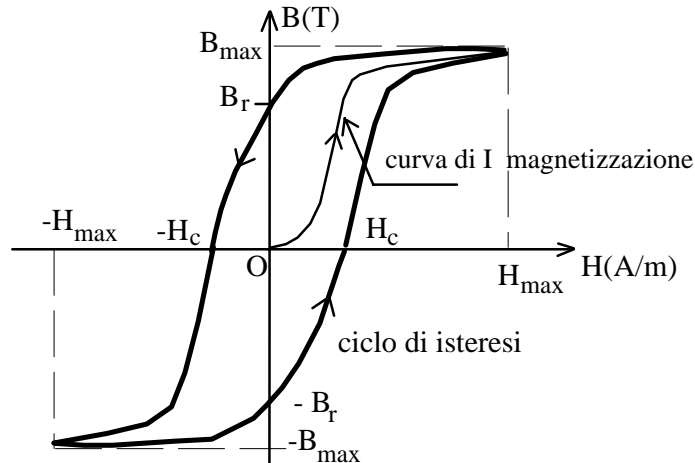


Figura 16

L'area del ciclo di isteresi risulta proporzionale alla energia specifica (per unità di volume) dissipata nel materiale a causa della rotazione (che avviene con attrito) dei domini. Il lavoro effettuato sul materiale viene parzialmente trasformato in calore.

Per rendersi conto di tale relazione consideriamo un toro di materiale non magnetizzato (vergine) sul quale è disposto un avvolgimento di  $N$  spire (**Figura 17**). Facendo variare la corrente è possibile far variare il campo magnetico e quindi l'induzione. Se si trascurano le perdite ohmiche nell'avvolgimento, per far variare l'induzione di una quantità  $dB$  nel bisogna fornire una energia pari a:

$$dW = i \cdot v dt = i \frac{d\Phi}{dt} dt = i d\Phi$$

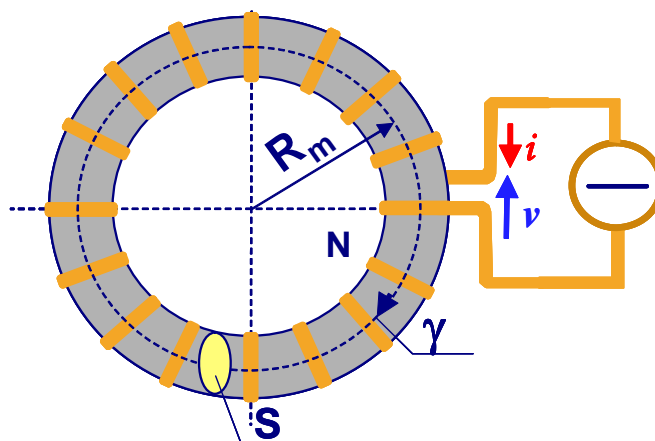


Figura 17

La corrente può essere ricavata dalla legge di Ampère applicata alla curva  $\gamma$ :

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ni \Rightarrow i = H \frac{2\pi R_m}{N}$$

mentre il flusso totale risulta esprimibile come:

$$\Phi \cong N \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = NBS$$

Allora si avrà:

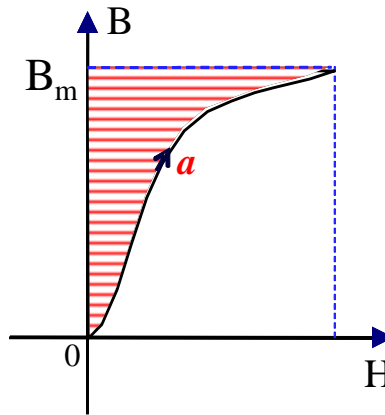
$$dW = i d\Phi = \frac{2\pi R_m}{N} NS H dB = V H dB$$

dove  $V$  è il volume del toro.

Quando l'induzione varia da 0 a  $B_m$  (tratto  $a$  della curva di prima magnetizzazione di **Figura 18**) si deve fornire il lavoro (per unità di volume):

$$w_{m(a)} = \int_0^{B_m} H dB$$

Pertanto, l'area tratteggiata sottesa dalla curva rappresenta l'energia specifica fornita al campo per far crescere la magnetizzazione del materiale. L'energia è fornita in quanto lungo la curva  $a$  si ha  $H > 0$ ,  $dB > 0$ .



**Figura 18**

Quando il campo magnetico decresce fino a ritornare a zero l'induzione non segue più la curva  $a$ , ma quella  $b$  (**Figura 19**).

$$w_{m(b)} = \int_{B_m}^{B_r} H dB$$

L'area sottesa dalla curva  $b$  (descritta dall'area quadrettata di **Figura 19**) rappresenta l'energia restituita dal campo. Infatti lungo la curva  $b$  si ha  $H > 0$ ,  $dB < 0$ .

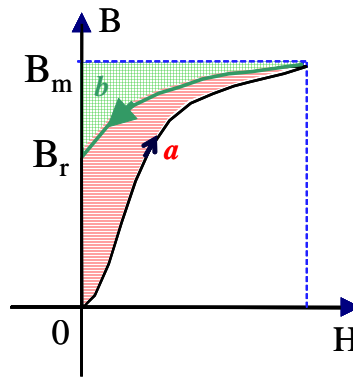


Figura 19

Pertanto, l'area tratteggiata di **Figura 19** (compresa tra la curva *a* e quella *b*) rappresenta una energia dissipata, in quanto fornita al campo, ma da questo non restituita:

$$w_{diss} = w_{m(a)} + w_{m(b)} > 0$$

Se si estende lo stesso tipo di ragionamento ad un ciclo completo di variazione di *H* e quindi di *B* si può concludere che l'area del ciclo di isteresi risulta pari all'energia specifica dissipata nel materiale.

L'isteresi aumenta con la frequenza del campo applicato e quindi con essa l'area del ciclo.

La forma dei diagrammi *B-H* varia notevolmente con il materiale ferromagnetico: i materiali con un ciclo di isteresi stretto sono detti "dolci", mentre un ciclo ampio caratterizza quelli "duri" (**Figura 20**). I materiali magnetici dolci sono caratterizzati da un campo coercitivo  $H_c$  piccolo, da una elevata permeabilità, da un ciclo di isteresi stretto ma elevata induzione alla saturazione. Essi vengono adoperati nelle applicazioni in cui è importante contenere le perdite, come nei nuclei di induttori, trasformatori e macchine elettriche. I materiali magnetici duri, al contrario, sono caratterizzati da un campo coercitivo elevato e da una induzione residua alta e quindi da cicli di isteresi assai ampi. La permeabilità di solito non è molto alta. Tali materiali trovano applicazione principalmente nella realizzazione di magneti permanenti e per la registrazione magnetica.

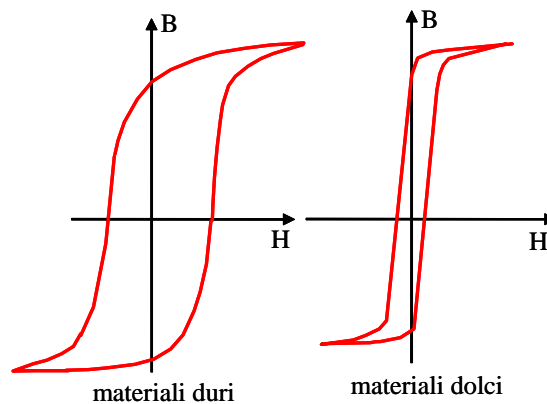


Figura 20

## Conduzione

In molti materiali, quali i buoni conduttori come i metalli, le soluzioni elettrolitiche, i gas ionizzati, nei semiconduttori ed anche in molti isolanti reali, i portatori di carica possono essere modellati come un gas ideale ionizzato, detto plasma, all'interno del mezzo. E' possibile considerare due specie di portatori, caratterizzati da uno stesso valore di carica ma di segno opposto  $\pm q$ , massa rispettivamente pari a  $m_{\pm}$ , e densità  $n_{\pm}$ . Queste cariche possono essere elettroni e ioni in un metallo, elettroni e lacune in un semiconduttore, ioni positivi e negativi in una soluzione, ecc. In presenza di un campo elettrico, i portatori con carica positiva si muovono nel verso del campo, mentre le cariche negative in verso opposto e, nel moto, subiscono degli urti con frequenze  $f_{\pm}$  con il mezzo "ospitante" che pertanto si comporta da mezzo dissipativo o viscoso. Inoltre, come in un gas ideale, le cariche esercitano su sé stesse una forza mediante un termine di pressione dovuto all'agitazione termica (termine che sarebbe presente anche nel caso in cui le particelle non fossero cariche).

Pertanto, per descrivere il moto di ogni carica è possibile utilizzare la legge di Newton, in cui oltre alla forza esercitata dal campo elettrico, si considerano il termine di attrito (proporzionale alla velocità della carica) e quello legato al gradiente di pressione

$$m_{\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_{\pm}}{\partial t} = \pm q \mathbf{E} - m_{\pm} f_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} - \frac{1}{n_{\pm}} \nabla p$$

Ricordando che per un gas ideale la pressione è data da  $p = n k T$ , dove  $n$  è la densità di particelle,  $k$  è la *costante di Boltzmann* ( $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K),  $T$  è la temperatura assoluta, si potrà quindi scrivere:

$$m_{\pm} \frac{\partial \mathbf{v}_{\pm}}{\partial t} = \pm q \mathbf{E} - m_{\pm} f_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} - \frac{1}{n_{\pm}} \nabla (n_{\pm} k T)$$

In relazione al tipo di materiale è possibile distinguere dei meccanismi prevalenti nella espressione del moto delle cariche.

In alcuni materiali la frequenza di collisione è dell'ordine di  $10^{13}$  Hz e pertanto si può ritenere trascurabile il termine di inerzia:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\pm}}{\partial t} \ll f_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}$$

In tale ipotesi si può risolvere l'equazione del moto rispetto alla velocità dei portatori:

$$\mathbf{v}_{\pm} = \frac{1}{m_{\pm} f_{\pm}} \left( \pm q \mathbf{E} - \frac{1}{n_{\pm}} \nabla (n_{\pm} k T) \right)$$

Poiché la densità di carica è data da  $\rho_{\pm} = \pm q n_{\pm}$ , la densità di corrente risulta pari a:



$$\mathbf{J}_{\pm} = \rho_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} = \frac{\pm q n_{\pm}}{m_{\pm} f_{\pm}} \left( \pm q \mathbf{E} - \frac{1}{n_{\pm}} \nabla (n_{\pm} kT) \right) = \pm \rho_{\pm} \mu_{\pm} \mathbf{E} - D_{\pm} \nabla \rho_{\pm}$$

dove  $\mu_{\pm} = \frac{\pm q}{m_{\pm} f_{\pm}}$  è detta *mobilità* dei portatori e  $D_{\pm} = \frac{kT}{m_{\pm} f_{\pm}}$  è il *coefficiente di diffusione*. Il rapporto, noto come *relazione di Einstein*, tra la mobilità ed il coefficiente di diffusione viene detta *tensione termica*:

$$\frac{D_{\pm}}{\mu_{\pm}} = \frac{q}{kT}$$

In molti materiali, quali i conduttori metallici, si ha localmente neutralità di carica ( $\rho_{+} = \rho_{-} = \rho_0$ ) e, pertanto, il termine legato al gradiente di densità di carica risulta nullo. Quindi, la densità di corrente risulterà legata in modo proporzionale, tramite la conducibilità  $\sigma$ , al campo elettrico:

$$\mathbf{J}_{\pm} = \mathbf{J}_{+} + \mathbf{J}_{-} = \rho_0 (v_{+} - v_{-}) = q n_0 (\mu_{+} + \mu_{-}) \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

## Elettrocinesica

Poiché il campo elettrico è conservativo (la sua circuitazione è nulla), risulta del tutto evidente che per sostenere una densità di corrente non nulla in un circuito (percorso chiuso) occorre prevedere dei tratti di questo in cui sia presente un campo non conservativo (o a rotore non nullo) in grado di effettuare lavoro sulle cariche (campo elettromotore). Le forze agenti sulle cariche possono essere di diversa natura (ad esempio, chimica nelle pile e nelle batterie, legata ad una radiazione nelle celle fotovoltaiche, elettromagnetica nei generatori elettrici, ecc.). Da un punto di vista del modello, è possibile descrivere tali forze introducendo un campo, detto *elettromotore*  $\mathbf{E}_m$ . Il circuito in cui si sviluppa una densità di corrente deve pertanto contenere una regione, quella del generatore, in cui operano le forze in grado di determinare un moto stazionario alle cariche. Si pone pertanto pari a  $e$  la circuitazione di tale campo elettromotore e ad essa si dà il nome di forza elettromotrice agente su  $\gamma$ :

$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl \neq 0$$

Supponendo per semplicità che la regione del generatore sia a geometria cilindrica come nel caso di una pila (**Figura 21**) si possono considerare due casi: generatore a morsetti aperti e “sotto carico” ovvero collegato ad un circuito esterno.

Nel caso in cui il generatore non sia collegato ad un circuito esterno (funzionamento a morsetti aperti) risulta  $\mathbf{J}=0$  ovunque. All’interno del generatore la presenza del campo elettromotore determina una separazione delle cariche: supponiamo che quelle positive vengano spinte verso la parte superiore. La distribuzione di carica fa nascere un campo elettrico che tende ad opporsi a quello elettromotore, fino a quando si raggiunge una condizione di equilibrio nella

quale i due campi risultano uguali ed opposti. La forza totale agente sui portatori carica, data dalla somma del campo elettromotore e di quello elettrostatico, è nulla nel generatore ovvero:

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E} \quad \forall P \in G$$

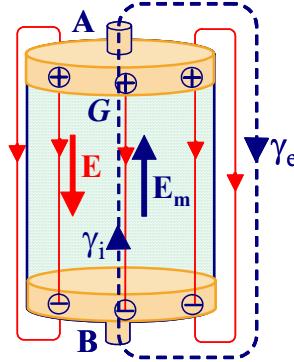


Figura 21

In tali condizioni si avrà ( $\gamma = \gamma_i \cup \gamma_e$ ):

$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl + \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl = \int_{B\gamma_i A} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl$$

in quanto il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è conservativo o irrotazionale. D'altra parte:

$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{A\gamma_e B} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl + \int_{B\gamma_i A} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl$$

ma, all'interno del generatore  $\mathbf{E}_{tot}=0$ , mentre l'unico campo presente all'esterno è quello elettrostatico che, data la irrotazionalità, discende da una funzione potenziale. Si ha quindi:

$$e = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{A\gamma_e B} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_B^A \nabla \Phi \cdot \mathbf{t} dl = \Phi(A) - \Phi(B) = v_{AB}$$

che rappresenta la caratteristica del generatore a vuoto.

Nel caso il generatore venga collegato tramite dei tratti di conduttore perfetto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) ad un componente  $S$  le cariche si muoveranno lungo il circuito dando luogo ad una corrente, descritta da una densità  $\mathbf{J}$ , che modifica la loro distribuzione nell'intero sistema (**Figura 22**). In particolare possiamo porre  $\mathbf{J} = \sigma_S \mathbf{E}$  nel componente  $S$  e  $\mathbf{J} = \sigma_G \mathbf{E}_{tot}$  nel generatore. In condizioni stazionarie, le cariche libere (supposte per semplicità positive) sottoposte al campo elettrico si muovono da punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore. All'interno del generatore il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è indebolito rispetto al caso a morsetti aperti per effetto del flusso delle cariche nel tratto esterno; pertanto, il campo elettromotore risulta prevalente e fa in modo che le cariche si spostino dal terminale a potenziale minore a quello a potenziale

maggiore. Si avrà quindi:

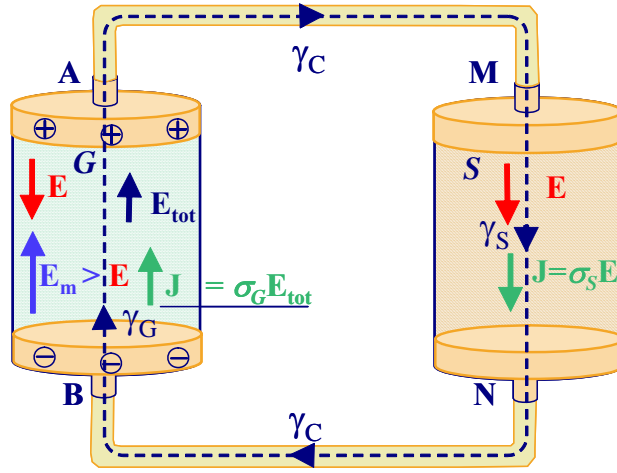


Figura 22

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E}_{tot} \cdot \mathbf{t} dl = \oint_{\gamma} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{t} dl + \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = e = \int_{B\gamma_G A} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t} dl + \int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl$$

in quanto il campo elettromotore è nullo ovunque all'esterno del generatore ed il campo elettrico è nullo all'interno dei tratti costituiti da materiale conduttore perfetto. Nell'ipotesi che i campi abbiano distribuzioni uniformi all'interno del generatore ed indicando con  $A_G$  la sezione del materiale, si ottiene:

$$\int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{M\gamma_S N} -\nabla\Phi \cdot \mathbf{t} dl = V_{MN}$$

$$\int_{B\gamma_G A} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t} dl = \int_{B\gamma_S A} \frac{A_G}{A_G \sigma_G} \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl = I \int_{A\gamma_S B} \frac{dl}{A_G \sigma_G} = R_G I$$

Pertanto la caratteristica "sotto carico" del generatore risulta:

$$V_{MN} = e - R_G I$$

D'altra parte, considerando ancora distribuzioni uniformi dei campi all'interno del componente, si potrà anche scrivere :

$$V_{MN} = \int_{M\gamma_S N} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{M\gamma_S N} \frac{A_S}{A_S \sigma_S} \mathbf{J} \cdot \mathbf{t} dl = I \int_{M\gamma_S N} \frac{dl}{A_S \sigma_S} = R_S I$$

che rappresenta la caratteristica (legge di Ohm) del resistore.

## **Modelli statici e quasi statici**

Dal modello generale descritto dalle equazioni di Maxwell si ricavano alcuni modelli validi in alcune specifiche condizioni di funzionamento. In particolare, nel caso in cui le grandezze nel sistema elettromagnetico in esame non varino nel tempo si ottengono i modelli statici nei quali i campi sono “disaccoppiati”, mentre nei sistemi elettromagnetici, in cui le variazioni temporali delle grandezze in esame siano descritte da tempi caratteristici “grandi” rispetto al tempo richiesto per la propagazione dell’onda e.m., si possono adoperare i modelli quasi stazionari.

Tali modelli sono particolarmente importanti nello studio dei circuiti elettrici. Essi infatti sono alla base delle leggi che descrivono il funzionamento dei componenti elettrici fondamentali (resistenza, capacità, induttanza, ecc.) nonché le interazioni fra i diversi componenti (leggi di Kirchhoff per le correnti e per le tensioni). Nel seguito si forniranno, in condizioni di funzionamento ideali, alcuni esempi di applicazioni di tali modelli per i principali componenti.

### **Modelli statici**

In particolare, per quanto riguarda i modelli statici, si avrà rispettivamente per il campo elettrico, magnetico e di corrente:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases} \quad \text{Modello dell'elettrostatica}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{lib} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad \text{Modello della magnetostatica}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{J}_{lib} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{J}_{lib} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \end{cases} \quad \text{Modello della campo statico di corrente}$$

La soluzione di tali sistemi di equazioni richiederebbe in generale la determinazione delle tre componenti di ogni campo vettoriale. Tuttavia, come vedremo nel seguito, utilizzando la descrizione in termini di funzioni potenziali (scalari o vettoriali) è possibile affrontare la soluzione di problemi più semplici.

## Modelli Quasi Statici

I modelli quasi statici, pur non essendo rigorosi, hanno notevole interesse pratico in quanto descrivono il comportamento di una vasta classe di componenti e circuiti.

In particolare, nello spazio vuoto il modello Quasi Statico Elettrico nella forma differenziale è descritto dal seguente set di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{lib} / \varepsilon_0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mu_0 \mathbf{H} / \partial t \cong 0 \\ \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\partial \varepsilon_0 \mathbf{E} / \partial t) \end{array} \right.$$

Si noti che nella espressione del rotore del campo magnetico, si ritiene che la densità di corrente sia nulla (non ci sono conduttori percorsi da corrente nel vuoto).

Analogamente, nello spazio vuoto il modello Quasi Statico Magnetico nella forma differenziale è descritto dal seguente set di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mu_0 \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\mathbf{J} + \partial \varepsilon_0 \mathbf{E} / \partial t) \cong \mathbf{J} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{lib} / \varepsilon_0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mu_0 \mathbf{H} / \partial t \end{array} \right.$$

Ci si chiede quali sono i limiti di validità di tali modelli ed in particolare l'errore che si commette quando si trascura rispettivamente il termine relativo alla derivata parziale dell'induzione magnetica nella equazione di Faraday-Neumann (Modello Quasi Statico Elettrico – QSE) o la derivata parziale del vettore spostamento elettrico nella equazione di Ampère-Maxwell (Modello Quasi Statico Magnetico – QSM).

A tal fine si può procedere effettuando una comparazione tra l'errore commesso nella valutazione del campo di interesse considerando il calcolo approssimato (in cui tali derivate vengono trascurate) ed il calcolo esatto<sup>6</sup>. Evidentemente l'approssimazione potrà essere ritenuta tanto migliore quanto più è piccolo il rapporto tra tali valori. Al fine di esplicitare tale valutazione, consideriamo un sistema descritto dal modello QSE nel caso in cui il mezzo sia il vuoto. Esso esemplifica un'ampia gamma di situazioni nelle quali il campo a cui è associata la aliquota prevalente di energia (come è possibile notare nell'ipotesi che le grandezze siano di tipo continuo (la frequenza del segnale tende a zero) è quello elettrico. Si tratta di due sfere realizzate con materiale conduttore perfetto tra le quali un generatore sinusoidale impone una tensione  $e(t)$  (**Figura 23**). Effettuiamo una stima degli ordini di grandezza dei campi in gioco considerando come unità di scala rispettivamente:

<sup>6</sup> Tale approccio è quello adottato nel libro H. A. Haus and J. R. Melcher: Electromagnetic Fields and Energy, Prentice Hall, London, 1989.

Il materiale del libro è disponibile anche su web: [http://web.mit.edu/6.013\\_book/www/book.html](http://web.mit.edu/6.013_book/www/book.html)

- per la dimensione geometrica una lunghezza  $L \cong 2R$
- per la dimensione temporale il periodo  $T$  della tensione applicata

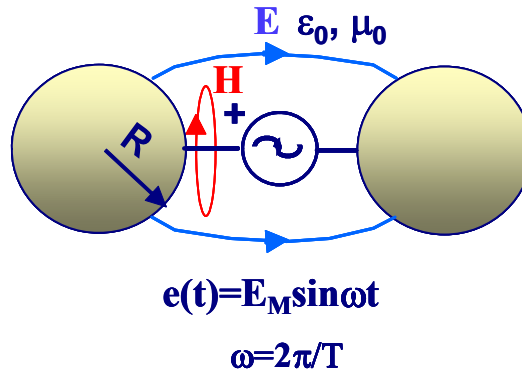


Figura 23

Approssimiamo le derivate (rapporti tra quantità infinitesime) con rapporti tra le quantità “finite” in cui in cui le dimensioni geometriche e i tempi sono descritti da  $L$  e  $T$ . Secondo tale approccio la legge di Gauss può essere espressa come:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_{\text{lib}} / \varepsilon_0 \Rightarrow E/L = \rho_{\text{lib}} / \varepsilon_0$$

Il campo elettrico pertanto risulta:

$$E = L \rho_{\text{lib}} / \varepsilon_0$$

Essendo la sorgente sinusoidale le cariche sulle due sfere variano con periodo  $T$  dando origine ad una corrente nei conduttori di collegamento tra esse che varia con la stessa legge oraria. A tale corrente è associato il campo magnetico  $H$ . Al fine di valutare tale campo, consideriamo però una curva che non concatena il conduttore, ma si concatena con una linea di  $E$  nello spazio vuoto ed applichiamo ad essa, secondo l’approccio precedente, la legge di Ampère-Maxwell:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \varepsilon_0 \mathbf{E} / \partial t$$

Considerando l’espressione di  $E$  valutata precedentemente, il campo magnetico risulta:

$$H = \varepsilon_0 E L / T = \rho_{\text{lib}} L^2 / T$$

Ci chiediamo quale sia l’errore che si commette nella valutazione del campo elettrico senella legge di Faraday-Neumann si ritiene trascurabile il termine di derivata del campo magnetico. Per effettuare tale stima utilizziamo l’espressione appena valutata di  $H$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t \Rightarrow |E_{\text{err}} / L| = \mu_0 H / T = \mu_0 \rho_{\text{lib}} L^2 / T^2 \Rightarrow |E_{\text{err}}| = \mu_0 \rho_{\text{lib}} L^3 / T^2$$

Tale stima può quindi essere confrontata con il valore approssimato di  $E$  precedentemente

calcolato:

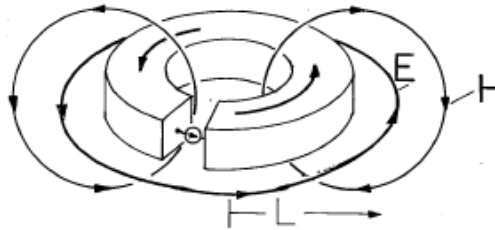
$$\frac{|E_{err}|}{E} = \frac{\mu_0 \rho_{lib} L^3 / T^2}{\rho_{lib} L / \epsilon_0} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{L^2}{T^2} = c^2 \frac{L^2}{T^2}$$

dove  $c$  è la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica nello spazio vuoto. Affinché l'approssimazione QSE sia valida occorre che tale rapporto sia quanto più piccolo possibile:

$$\frac{|E_{err}|}{E} \ll 1 \Rightarrow \frac{L}{T} \ll c \Leftrightarrow \frac{L}{c} \ll T$$

Pertanto affinché il modello QSE risulti valido, il tempo impiegato dall'onda elettromagnetica per propagarsi nel sistema in esame individuato dalla dimensione geometrica  $L$  deve essere trascurabile rispetto al tempo caratteristico  $T$  del segnale che interessa il sistema stesso.

Allo stesso tipo di risultato si perviene considerando un modello di sistema QSM come quello rappresentato in **Figura 24**, in cui una corrente sinusoidale di periodo  $T$  alimenta una spira caratterizzata da una dimensione geometrica  $L$ .



**Figura 24**

Occorre però definire quali sono le condizioni che fanno capire se ad un sistema è possibile applicare un modello QSE o QSM. A tal fine si può studiare il comportamento dei campi quando i segnali tendono a divenire statici (la frequenza tende a zero). Nel caso delle due sfere precedentemente esaminato, quando la frequenza del generatore tende a zero, le cariche non varieranno e quindi non sarà presente alcuna corrente ed il campo magnetico sarà nullo. Pertanto l'unico campo di interesse è quello elettrico e l'approssimazione è quella QSE. In generale sarà possibile valutare il modello da considerare valutando a quale campo sarà associata la maggiore aliquota di energia (**Figura 253**).

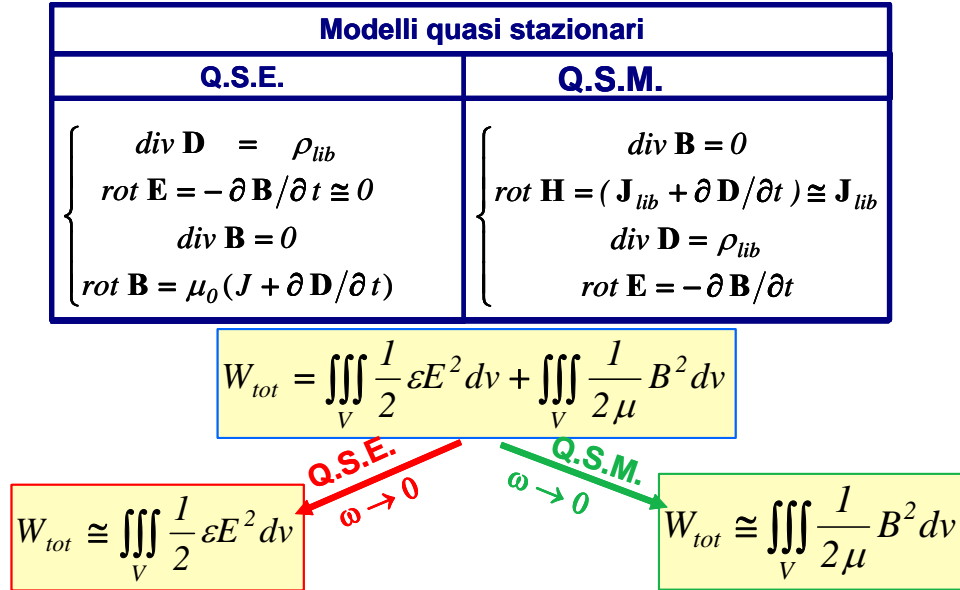


Figura 25



## Soluzione di problemi di campo: equazioni di Laplace e Poisson

Come detto in precedenza, i modelli statici e quasi statici sono particolarmente importanti nello studio dei circuiti in quanto consentono di ricavare le caratteristiche di componenti fondamentali, quali resistenza, capacità, induttanza (**Figura 26**).

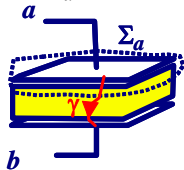
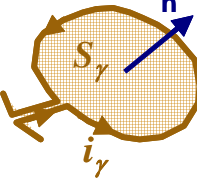
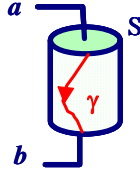
Condensatore	Induttore	Resistore
$\mathbf{E} \neq 0 \quad \mathbf{B} \rightarrow 0$	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \rightarrow 0$	$\mathbf{B} \neq 0 \quad \mathbf{E} \neq 0$
$C = \frac{\iint_{\Sigma_a} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds}{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}$	$L = \frac{\iint_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds}{i_\gamma}$	$R = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl}{\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds}$
		

Figura 26

Come è facile osservare dall'esame del set di equazioni che descrivono rispettivamente i modelli QSE e QSM, l'andamento spaziale dei campi può essere valutata direttamente a partire dalle sorgenti solo quando la loro distribuzione è nota in tutto lo spazio ed è caratterizzata da proprietà di "simmetria" (geometrie "mono-dimensionali"). In molti altri casi la distribuzione dei campi può essere ottenuta la descrizione in termini di funzioni potenziali (scalari o vettoriali). Infatti, la irrotazionalità (sebbene approssimata) di  $\mathbf{E}$  consente di far discendere tale campo da una funzione potenziale scalare  $\Phi(\mathbf{P})$ :

$$\nabla \times \mathbf{E} \cong 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi = \rho_{lib} / \varepsilon$$

La determinazione della funzione potenziale può essere effettuata studiando le soluzioni di una equazione detta di Laplace, se la sua divergenza è identicamente nulla, o di Poisson, se la sua divergenza è diversa da zero.

Il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  può essere collegato ad un potenziale scalare  $\Psi_{\mathbf{B}}(\mathbf{P})$  solo all'interno di domini linearmente connessi privi di correnti. Il problema risulta essere in tal caso sempre di Laplace.

Il campo magnetico  $\mathbf{H}$  può anch'esso essere collegato ad un potenziale scalare  $\Psi_{\mathbf{H}}(\mathbf{P})$  solo all'interno di domini linearmente connessi. Il problema risulta essere di Laplace per domini omogenei, di Poisson nel caso di domini disomogenei (considerazioni specifiche vanno ovviamente svolte nel caso di punti singolari e/o di superfici di discontinuità).

Ancora, il campo  $\mathbf{B}$  può essere fatto discendere da un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  le cui componenti cartesiane possono essere descritte in genere da tre equazioni di Poisson.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_{lib} \xrightarrow{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_{lib}$$

dove per la divergenza di  $\mathbf{A}$  si è adoperata la condizione (gauge) di Coulomb ( $div \mathbf{A} = 0$ ) valida in condizioni statiche e quasi statiche.

Si può dimostrare che, in un dominio  $\mathbf{D}$ , la soluzione di campo è unica se si assegnano i valori del potenziale sulla frontiera di  $\mathbf{D}$  (condizioni al contorno tipo *Dirichlet*) o i valori della derivata normale (condizioni al contorno tipo *Neumann*). Nel primo caso, è univocamente individuato il potenziale scalare. Se il dominio è illimitato, occorrerà introdurre le opportune condizioni all'infinito.

Più avanti si illustrerà una soluzione generale al problema di Laplace con condizioni alla Dirichlet a partire da una soluzione di un problema particolare di Poisson (metodo della funzione di Green). Sarà mostrato, inoltre, che un problema di Poisson con condizioni alla Dirichlet può essere ricondotto ad un problema di Laplace con condizioni al contorno opportunamente modificate.

In presenza di superfici di discontinuità, occorrerà risolvere il problema di Laplace-Poisson individuando sottodomini regolari in cui sia possibile definire gli operatori differenziali; le condizioni al contorno dei sottodomini sono espresse da relazioni di *raccordo* opportune.

E' opportuno osservare che, data la struttura dei set di equazioni, una volta determinata la soluzione di un problema relativo ad uno dei campi per una assegnata geometria, questa può essere utilizzata immediatamente per problemi *analoghi* inerenti gli altri campi. Infatti, nell'ipotesi di trascurare la dipendenza dal tempo e considerando materiali omogenei si ha:

Elettrostatica	Campo statico di corrente (in assenza di campo impresso)	Magnetostatica (in domini monoconnessi in cui $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ )
$\begin{cases} div \mathbf{D} = \rho_{lib} \\ rot \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$	$\begin{cases} div \mathbf{J}_{lib} = 0 \\ rot \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{J}_{lib} = \sigma \mathbf{E} \end{cases}$	$\begin{cases} div \mathbf{B} = 0 \\ rot \mathbf{H} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{H} = -\nabla \Psi_H \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$
$\nabla^2 \Phi = -\rho_{lib} / \varepsilon$	$\nabla^2 \Phi = 0$	$\nabla^2 \Psi_H = 0$

In generale la soluzione di un problema di Laplace o Poisson può essere ricercata mediante *tecniche analitiche e numeriche*.

Le *tecniche analitiche* si adattano a sistemi descritti da geometrie bi o tridimensionali con particolari simmetrie ed in presenza di mezzi caratterizzati da relazioni costitutive semplici (linearità, isotropia).

I *metodi numerici* (nel caso di geometrie complesse e mezzi caratterizzati da relazioni costitutive non lineari, anisotrope, isteretiche, ecc.)

Nel seguito si mostreranno alcuni semplici esempi per ognuno di tali approcci.

### Unicità della soluzione

Qualunque sia il metodo adottato per pervenire alla determinazione della soluzione delle equazioni di Laplace o Poisson in un dominio e la corrispondente distribuzione di campo, si pone il problema di conoscere se la soluzione così ottenuta è l'unica possibile per le assegnate condizioni al contorno. E' possibile verificare che data una soluzione di un problema di Laplace (o Poisson) che soddisfa date condizioni al contorno questa è l'unica soluzione.

Ciò può essere dimostrato mediante un ragionamento per assurdo. Consideriamo per semplicità un problema di Laplace in  $\Omega$  con condizioni al contorno di tipo Dirichlet sulla frontiera  $\partial\Omega$  e supponiamo che ci siano due soluzioni che indichiamo con  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ .

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2\Phi_1 = 0 \\ \nabla^2\Phi_2 = 0 \end{cases} \quad e \quad \Phi_1|_{\partial\Omega} = \Phi_2|_{\partial\Omega} = f(P)$$

La differenza  $F_D$  tra  $F_1$  e  $F_2$  sarà anch'essa soluzione del problema di Laplace in  $\Omega$

$$\nabla^2\Phi_\Delta = \nabla^2\Phi_1 - \nabla^2\Phi_2 = 0$$

mentre sulla frontiera si ha  $\Phi_\Delta|_{\partial\Omega} = \Phi_1|_{\partial\Omega} - \Phi_2|_{\partial\Omega} = 0$

Poiché il laplaciano di  $F_D$  è nullo, avremo che anche  $\Phi_\Delta \nabla^2\Phi_\Delta = 0$  in ogni punto di  $\Omega$ . Applicando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\Phi_\Delta \nabla \Phi_\Delta) = \Phi_\Delta \nabla \cdot \nabla \Phi_\Delta + \nabla \Phi_\Delta \cdot \nabla \Phi_\Delta = \Phi_\Delta \nabla^2 \Phi_\Delta + \nabla \Phi_\Delta \cdot \nabla \Phi_\Delta = \nabla \Phi_\Delta \cdot \nabla \Phi_\Delta$$

si ha pertanto in  $\Omega$ :  $\nabla \cdot (\Phi_\Delta \nabla \Phi_\Delta) = \nabla \Phi_\Delta \cdot \nabla \Phi_\Delta$ . Se ora applichiamo il teorema della divergenza otteniamo:

$$\int_{\Omega} (\nabla \Phi_\Delta \cdot \nabla \Phi_\Delta) dv = \int_{\Omega} |\nabla \Phi_\Delta|^2 dv = \oint_{\partial\Omega} \Phi_\Delta \nabla \Phi_\Delta \cdot \mathbf{ds} = 0$$

essendo  $\Phi_\Delta$  nullo su  $\partial\Omega$ . L'integrale a primo membro è un quadrato di una funzione e pertanto sarà sempre positivo a meno che esso non sia nullo in ogni punto del dominio. Ciò può accadere se e solo se

$$\nabla \Phi_\Delta = 0$$

ovvero, indicata con  $k$  una costante, si ha:

$$\Phi_\Delta = \Phi_1 - \Phi_2 = k \quad \forall P \in \Omega$$

Pertanto, per un problema di tipo Dirichlet i due potenziali  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  possono essere diversi solo per una costante. Mediante simili ragionamenti si può dimostrare un teorema di unicità anche per equazioni di tipo Poisson e per condizioni al contorno di tipo Neumann o miste.

## Metodi analitici

### Funzione di Green

Il problema di Poisson in un dominio limitato ed omogeneo  $D$  con assegnate condizioni sulla frontiera di un può essere ricondotto ad un problema di Laplace considerando la soluzione nello spazio libero  $V_L$  a partire dai valori assunti dal laplaciano all'interno del dominio

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_D \frac{\rho(P)}{r_{QP}} d\tau$$

Alla soluzione nello spazio libero andrà sommata la soluzione di una equazione di Laplace con condizioni al contorno pari alla differenza tra i valori assegnati ed i valori assunti dalla soluzione nello spazio libero in corrispondenza dei punti del contorno (**Figura 27**).

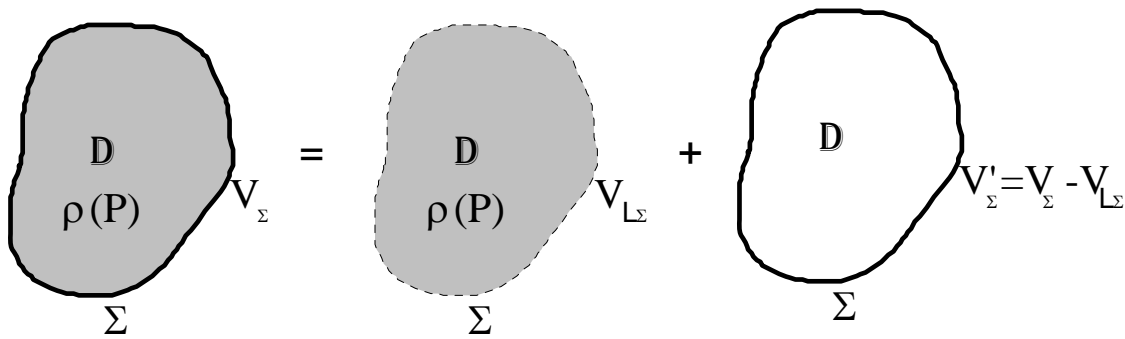


Figura 27

Consideriamo ora la funzione  $G_D(P, Q)$  che descriva la soluzione in termine di potenziale elettrico, assegnato nullo sulla frontiera, in ogni punto  $P$  interno al dominio  $D$ , individuando come sorgente una sola carica puntiforme in  $Q$ , di valore  $q=1$ .

Il laplaciano di tale funzione in  $D$  potrà essere presentato come

$$\nabla^2 G_D(P, Q) = -\delta(P - Q)$$

dove  $\delta(P-Q)$  rappresenta la funzione impulsiva unitaria centrata in  $Q$ , nulla per  $P \neq Q$ ; per ogni volume  $\Delta\tau$  contenente  $Q$ , si ha inoltre

$$\iiint_{\Delta\tau_Q} \delta(P - Q) d\tau_Q = 1$$

Avremo allora

$$\iiint_{\Delta\tau} \nabla^2 G_D d\tau = -\iiint_{\Delta\tau} \frac{\rho}{\varepsilon} d\tau = -\iiint_{\Delta\tau} \delta(P-Q) d\tau = -1$$

Infatti, il laplaciano in un punto è pari alla densità di carica  $\rho$  in quel punto, divisa per  $\varepsilon$ ; nel nostro caso, per definizione di  $G_D(P,Q)$ , è

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(P) = 0 \quad \text{per } P \neq Q \\ \iiint_{\Delta\tau_Q} \rho(P) d\tau_Q = 1 \cdot \varepsilon \quad \text{per ogni intorno di } Q \end{array} \right.$$

La funzione  $G_D(P,Q)$ , detta **funzione di Green**, è la soluzione in termini di potenziale di un particolare problema di Poisson: sorgente puntiforme in un punto (generico)  $Q$ , di valore  $q=1 \times \varepsilon$  e potenziale nullo sul contorno di  $D$ <sup>7</sup>.

Incidentalmente, i valori della derivata normale sul contorno di  $D$  della  $G_D$  devono, per il teorema della divergenza, soddisfare la condizione:

$$\iiint_{\Delta\tau} \nabla^2 G_D d\tau = -1 = \iiint_{\Delta\tau} \nabla \cdot \nabla G_D d\tau = \oiint_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

essendo  $\Sigma$  la frontiera di  $D$ .

La conoscenza della funzione di Green, in particolare i valori della derivata normale sulla frontiera, permette di risolvere un qualsiasi problema di Laplace ( $\nabla^2 V=0$ ) con valori del potenziale  $V$  assegnati sulla frontiera (problema di Dirichlet). Infatti, applicando a  $G_D$  ed a  $V$  l'identità di Green, si ha

$$\iiint_{\Delta\tau} (V\nabla^2 G_D - G_D \nabla^2 V) d\tau = \oiint_{\Sigma} V|_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

essendo  $G_D$  nulla sulla frontiera. Poiché il laplaciano di  $G_D(P,Q)$  è nullo dappertutto tranne in  $Q$  e  $V$  è una funzione regolare nell'intorno di  $Q$ <sup>8</sup>, sarà

$$\iiint_{\Delta\tau} (V\nabla^2 G_D - G_D \nabla^2 V) d\tau = \iiint_{\Delta\tau} V\nabla^2 G_D d\tau \cong V(Q) \iiint_{\Delta\tau} \nabla^2 G_D d\tau = V(Q)(-1)$$

e, di conseguenza,

$$\nabla^2 G_D(P,Q) = -\frac{1}{\varepsilon} \delta(P-Q)$$

<sup>7</sup>In altri contesti potrà trovarsi la definizione . In tal caso, la sorgente è una carica puntiforme unitaria; i potenziali associati si potranno ottenere moltiplicando il risultato per  $1/\varepsilon$ .

<sup>8</sup>Occorre considerare che anche  $G_D$  è integrabile in ogni intorno limitato di  $Q$ .

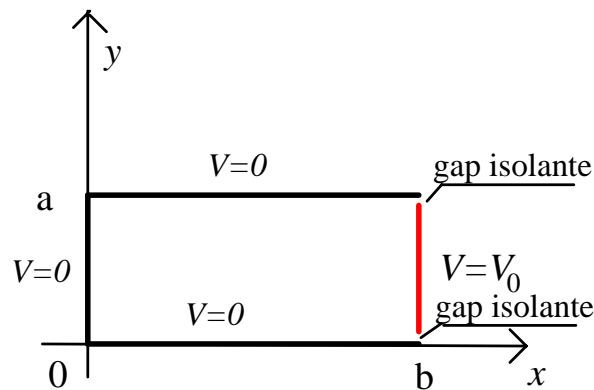
$$V(Q) = -\oint_{\Sigma} V|_{\Sigma} \frac{dG_D}{dn} d\Sigma$$

Il valore del potenziale in un punto generico  $Q$  interno a  $D$  si otterrà pesando sulla frontiera i valori valori assegnati del potenziali con i valori della derivata normale della funzione di Green sulla frontiera, con sorgente in  $Q$ .

Resta ovviamente aperto il problema della determinazione della funzione di Green, risolto analiticamente nel caso di domini con particolari geometrie. In generale, si dovrà ricorrere a tecniche numeriche.

## Separazione delle variabili

Tale metodo si presta alla soluzione di problemi bi e tridimensionali in geometria cartesiana, cilindrica e sferica. Per semplicità esso viene illustrato con riferimento alla soluzione del problema rappresentato in **Figura 28**. Si tratta di un condotto a sezione rettangolare di lunghezza infinita nella direzione dell'asse  $z$ ; la presenza dei gap isolanti assicura la funzionalità elettrica del sistema nonché la compatibilità delle condizioni al contorno.



**Figura 28**

Il problema è descritto da un'equazione di Laplace bidimensionale (infatti la struttura si ripete indefinitamente lungo  $z$ ) in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

e dalle seguenti condizioni al contorno:

$$V(x, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq b, y = 0 \quad (2.a)$$

$$V(x, y) = 0 \quad x = 0, 0 \leq y \leq a \quad (2.b)$$

$$V(x, y) = 0 \quad 0 \leq x \leq b, y = a \quad (2.c)$$

$$V(x, y) = V_0 \quad x = b, 0 < y < a \quad (2.d)$$

Cerchiamo una soluzione del problema del tipo:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3)$$

in cui il potenziale sia esprimibile come prodotto di una funzione della sola  $x$  e di una della sola  $y$ . Sostituendo la (3) nella (1)

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

e dividendo per  $XY$  si ottiene:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \quad (4)$$

ovvero:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad (5)$$

Si osserva che in tale equazione affinché il primo membro, che è funzione della sola variabile  $x$ , risulti uguale al secondo, funzione della sola  $y$ , per ogni scelta  $(x, y)$  occorre che essi siano separatamente uguali ad una costante  $\lambda$ , detta costante di separazione.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (6)$$

Risolvere la (5) risulta equivalente alla soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ Y'' + \lambda Y &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Consideriamo ora la soluzione del sistema (7) in dipendenza del valore assunto dalla costante di separazione

#### Caso a: $\lambda=0$

In tal caso la seconda delle (7) diventa  $Y'' = 0 \Rightarrow Y(y) = Ay + B$  con le costanti da ricavare sulla base delle condizioni al contorno. Imponendo la (2.a) e la (2.c)

$$Y(y)|_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$Y(y)|_{y=a} = 0 \Rightarrow Aa = 0 \Rightarrow A = 0$$

si ottiene la soluzione banale  $V(x, y) = X(x)Y(y) = 0$  che escludiamo per ipotesi.

### Caso b: $\lambda < 0$

In tal caso, ponendo  $\lambda = -\alpha^2$ , la seconda delle (7) diventa  $Y'' - \alpha^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y}$  con le costanti da ricavare sulla base delle condizioni al contorno. Imponendo ancora la (2.a)

$$Y(y)|_{y=0} = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow Y(y) = 2A \sinh \alpha y$$

e la (2.c)

$$Y(y)|_{y=a} = 0 \Rightarrow 2A \sinh \alpha y|_{y=a} = 0 \Rightarrow A = 0$$

si ottiene anche in questo caso la soluzione banale, essendo per ipotesi  $a=0$ .

### Caso c: $\lambda > 0$

Dalla precedente discussione risulta pertanto evidente che l'unica possibilità è che risulti  $\lambda > 0$ . Poniamo quindi  $\lambda = \beta^2$ . In tal caso la soluzione delle (7) risulta:

$$\begin{aligned} X'' - \beta^2 X = 0 &\Rightarrow X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} \\ Y'' + \beta^2 Y = 0 &\Rightarrow Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y \end{aligned}$$

e quindi il potenziale sarà esprimibile come:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) = (Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x})(C \cos \beta y + D \sin \beta y) \quad (8)$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni al contorno. Per la (2.a)

$$V(x, y) = (Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x})(C \cos \beta y + D \sin \beta y)|_{\forall x \in [0, b], y=0} = 0 \Rightarrow C = 0$$

e per la (2.b)

$$V(x, y) = (Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x})(D \sin \beta y)|_{x=0, \forall y \in [0, a]} = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

e quindi

$$V(x, y) = A(e^{\beta x} - e^{-\beta x})(D \sin \beta y) = A^* \sinh \beta x \cdot \sin \beta y$$

avendo posto  $A^* = 2AD$ . Imponiamo ora la (2.c):



$$V(x, y) = A^* \sinh \beta x \cdot \sin \beta y \Big|_{\forall x \in [0, b], y = a} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

in quanto è esclusa la soluzione  $A^*=0$  al fine di non ricadere nella soluzione banale; notiamo, inoltre, che  $n \neq 0$  poiché  $\beta \neq 0$ . I valori calcolati di  $\beta$  vengono detti *autovalori* e le funzioni corrispondenti *autofunzioni*.

$$V_n(x, y) = A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (9)$$

Rimane a questo punto da imporre la quarta condizione al contorno (2.d):

$$V(x, y) = A^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \Big|_{x=b, \forall y \in [0, a]} = V_0 \quad (10)$$

Risulta evidente che tale equazione non può essere soddisfatta  $\forall y \in ]0, a[$ . Osserviamo peraltro che utilizzando il metodo della separazione delle variabili siamo riusciti a soddisfare tre delle quattro condizioni al contorno e che a causa della linearità della equazione di Laplace si può applicare la sovrapposizione degli effetti: se le *autofunzioni* (9) sono soluzioni della eq. di Laplace (1) anche la combinazione lineare

$$V(x, y) = c_1 V_1(x, y) + c_2 V_2(x, y) + \dots + c_n V_n(x, y)$$

con  $c_1, c_2, c_n$  costanti arbitrarie, risulterà soluzione della (1). Pertanto è lecito ricercare una soluzione del tipo:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (11)$$

in cui le costanti  $c_n A_n^*$  vanno determinate sulla base della condizione al contorno (2.d). In particolare si ha:

$$V(x = b, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} b \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad (12)$$

Al fine di soddisfare questa condizione consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione rappresentata graficamente in **Figura 29**: si tratta di un'onda rettangolare di ampiezza  $V_0$  e periodo  $2a$ . Osserviamo che questa funzione assume il valore pari a  $V_0$  nell'intervallo di interesse pari ad  $a$ .

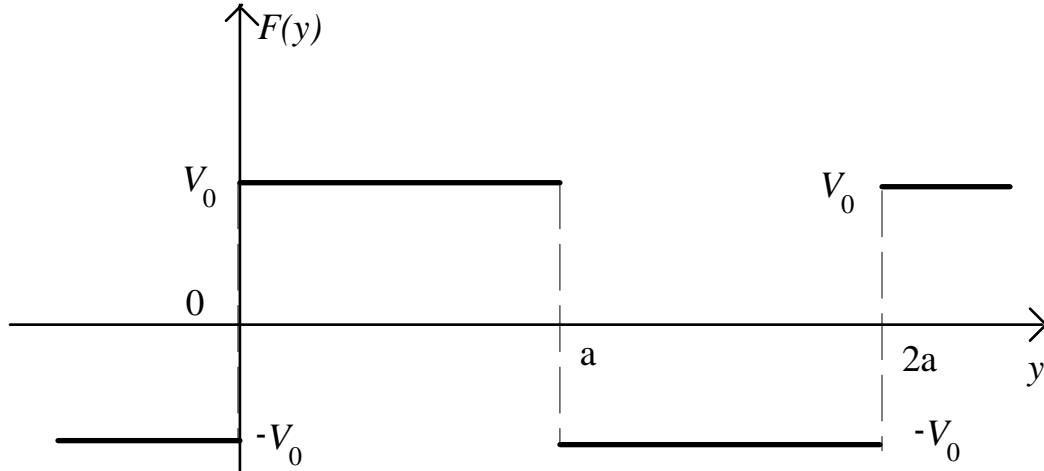


Figura 29

E' facile mostrare che questa funzione, per le sue caratteristiche di simmetria di tipo “dispari”, ammette uno sviluppo del tipo:

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}\right)y \quad T = 2a \quad (13)$$

con  $F(y) = V_0 \quad \forall y \in ]0, a[$  e

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \quad (14)$$

Confrontando la (13) con la (12) si osserva che ponendo

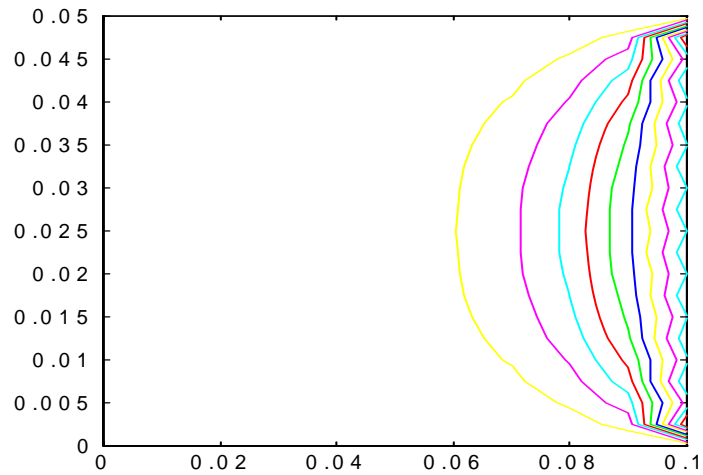
$$\gamma_n = \frac{4V_0}{n\pi} = c_n A_n^* \sinh \frac{n\pi}{a} b \quad n \text{ dispari} \quad (15)$$

la condizione (2.d) può essere soddisfatta. In definitiva, la soluzione del problema potrà essere posta nella forma:

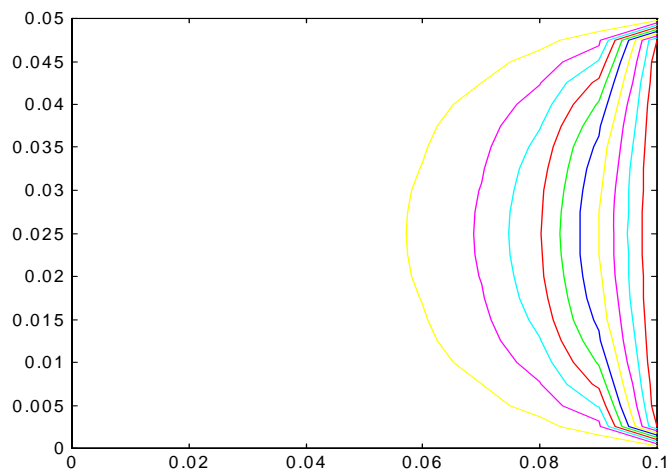
$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sinh \frac{n\pi}{a} b} \sinh \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \quad n \text{ dispari} \quad (16)$$

In realtà, nella pratica, non sarà necessario considerare gli infiniti termini dello sviluppo in serie di armoniche ma già dopo pochi termini si otterrà una stima sufficientemente precisa del potenziale all'interno della struttura. In particolare, nelle **Figure 30** e **31** sono riportati i risultati di due elaborazioni nelle quali sono state considerate rispettivamente 10 e 20 armoniche per un condotto avente  $a=5\text{cm}$  e  $b=10\text{cm}$  ed ipotizzando  $V_0=100\text{V}$ : sono

rappresentate le curve equipotenziali con intervallo pari a 10V. Si nota che con 20 armoniche la condizione sul lato destro così come il potenziale all'interno del condotto risulta meglio soddisfatta rispetto al caso di 10 armoniche. Si nota inoltre in entrambi i casi che la zona interessata da una distribuzione di potenziale apprezzabile risulta limitata rispetto all'intera sezione del condotto.



**Figura 30**  $N_{\text{armoniche}}=10$ ;  $N_{\text{sudd. su asse } x}=10$ ;  $N_{\text{sudd. su asse } y}=20$ ;  $V_0=100\text{V}$ .



**Figura 31**  $N_{\text{armoniche}}=20$ ;  $N_{\text{sudd. su asse } x}=10$ ;  $N_{\text{sudd. su asse } y}=20$ ;  $V_0=100\text{V}$ .

## Metodi numerici

I metodi analitici di soluzione delle equazioni di Laplace o Poisson per quanto eleganti ed in grado di fornire risultati con grado di precisione grande a piacere non possono essere adoperati nella maggior parte dei problemi di interesse pratico a causa della geometria non riconducibile a forme semplici esibita dai sistemi di interesse ingegneristico. Per determinare l'andamento dei campi in tali strutture è pertanto utile e conveniente, grazie alla disponibilità di sistemi di calcolo sempre più potenti e a basso costo, ricorrere alla soluzione attraverso metodi numerici. Fra tali metodi ricordiamo il metodo delle differenze finite ed il metodo degli elementi finiti che rientrano nella categoria dei metodi differenziali, il metodo dei momenti che fa parte dei metodi cosiddetti integrali. Nel seguito verrà illustrato un semplice approccio al metodo delle differenze finite.

### Metodo delle differenze finite

Il metodo delle differenze finite si può applicare per risolvere sia equazioni di Laplace che di Poisson per problemi bi e tridimensionali in geometria cartesiana, cilindrica e sferica. Le condizioni al contorno possono essere date sul potenziale (condizione di Dirichlet), sulla derivata normale (condizione di Neumann) o su entrambe (condizione di tipo misto). Per semplicità esso viene illustrato con riferimento alla soluzione del problema di Dirichlet piano in geometria cartesiana nel dominio  $\Omega$ :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \forall P \in \Omega \quad (1)$$

con condizioni al contorno del tipo  $V = f(P) \forall P \in \partial\Omega$ , dove  $\partial\Omega$  rappresenta la frontiera di  $\Omega$ . Il primo passo della procedura consiste, come mostrato in **Figura 32**, nel ricoprire con un reticolo (mesh), che per semplicità si suppone regolare ovvero costituito da lati di uguale lunghezza, il dominio in esame. In figura 1 è anche mostrato in dettaglio una parte del reticolo centrato intorno al punto (nodo)  $O$  di coordinate  $(x_0, y_0)$ . Il metodo consente di ricavare il potenziale in corrispondenza dei nodi del reticolo, che per comodità di trattazione numerica sono individuati dalla coppia di pedici  $i, j$ .

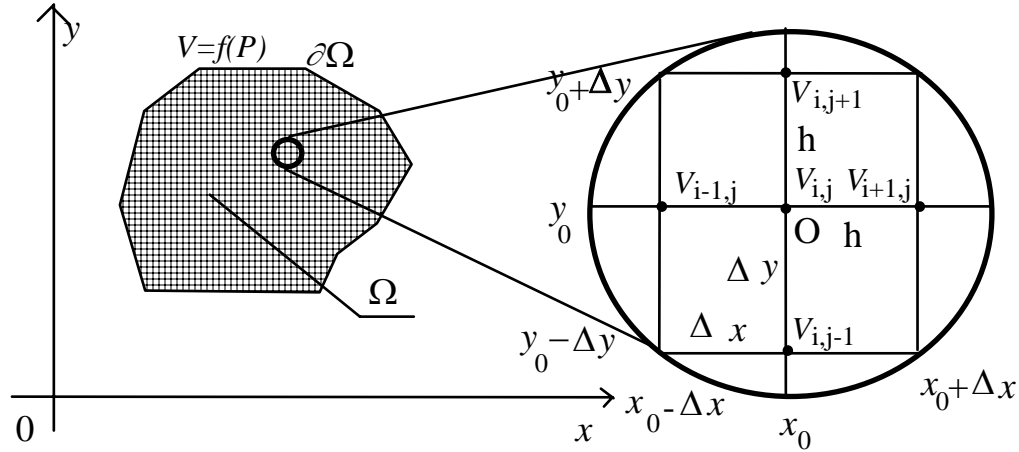


Figura 32

Il potenziale nell'intorno del punto O può essere ottenuto a partire dalla conoscenza del potenziale in tale punto attraverso uno sviluppo in serie di Taylor. Consideriamo in particolare i quattro punti della "croce" centrata in O. Si avrà:

$$V(x_0 + \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x^2 + \dots \quad (2.a)$$

$$V(x_0, y_0 + \Delta y) = V(x_0, y_0) + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y^2 + \dots \quad (2.b)$$

$$V(x_0 - \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) - \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta x^2 + \dots \quad (2.c)$$

$$V(x_0, y_0 - \Delta y) = V(x_0, y_0) - \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \Delta y^2 + \dots \quad (2.d)$$

Sommando queste quattro espressioni ed osservando che  $\Delta x = \Delta y = h$  si ottiene, trascurando i termini di ordine superiore dello sviluppo:

$$V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h) \cong 4V(x_0, y_0) + h^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_o + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_o \right) \quad (3)$$

D'altra parte la quantità in parentesi è nulla per ipotesi dovendo soddisfare l'equazione di Laplace nel dominio  $\Omega$ ; ne consegue che

$$V(x_0, y_0) \cong \frac{1}{4} [V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h)] \quad (4)$$

La (4) fornisce quindi un'espressione approssimata del potenziale del punto O in funzione del potenziale dei punti circostanti; è facile riconoscere in essa una forma *discreta* del teorema della media.

E' possibile notare che qualora avessimo dovuto risolvere un problema di Poisson:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5)$$

in cui  $\rho$  rappresenta la densità di carica e  $\varepsilon$  la permittività del mezzo, l'espressione in parentesi della (3) sarebbe stata pari al rapporto  $-\rho/\varepsilon$  per cui l'espressione del potenziale in O sarebbe risultata:

$$V(x_0, y_0) \cong \frac{1}{4} \left[ V(x_0 + h, y_0) + V(x_0, y_0 + h) + V(x_0 - h, y_0) + V(x_0, y_0 - h) + \frac{h^2 \rho|_O}{\varepsilon} \right] \quad (6)$$

Da tali espressioni è facile giungere alla formulazione opportuna per il trattamento numerico; in particolare la forma discretizzata della (4) sarà:

$$V(i, j) = \frac{1}{4} [V(i+1, j) + V(i, j+1) + V(i-1, j) + V(i, j-1)] \quad (7)$$

in cui  $i$  e  $j$  identificano i nodi del reticolo. Per risolvere questa equazione è possibile utilizzare varie metodologie numeriche; alcune di esse verranno descritte brevemente nel seguito.

### Sistema diretto

In tale metodo il potenziale dei nodi interni viene calcolato risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{AV} = \mathbf{B} \quad (8)$$

dove  $\mathbf{V}$  è il vettore colonna dei potenziali incogniti dei nodi interni  $\mathbf{B}$  è il vettore colonna in cui compaiono i potenziali noti ed  $\mathbf{A}$  è una matrice di coefficienti che per costruzione risulta *sparsa* e di tipo *a banda*. Per fissare le idee si può far riferimento alla semplice struttura di **Figura 33**, dove sono mostrati i potenziali noti dei punti sulla frontiera e la numerazione dei nodi interni.

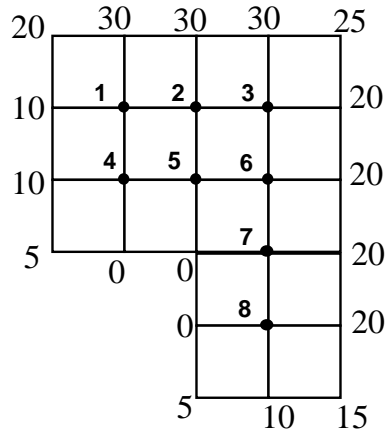


Figura 33

Applicando la (7) ai nodi interni si ottiene:

$$V_1 = \frac{1}{4}[V_2 + V_4 + 10 + 30] \Rightarrow -4V_1 + V_2 + V_4 = -40$$

$$V_2 = \frac{1}{4}[V_1 + V_3 + V_5 + 30] \Rightarrow V_1 - 4V_2 + V_3 + V_5 = -30$$

....

$$V_8 = \frac{1}{4}[V_7 + 0 + 10 + 20] \Rightarrow V_7 - 4V_8 = -30$$

Tale sistema di equazioni può essere espresso nella forma matriciale (8):

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -30 \\ -50 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \\ -20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  presenta la maggior parte dei coefficienti nulli (sparsità della matrice) mentre quelli non nulli sono concentrati intorno alla diagonale principale (struttura a banda). Si nota, inoltre, che per la sua struttura la matrice  $\mathbf{A}$  può essere considerata una sorta di matrice di incidenza del tipo di quella incontrata nello studio della teoria dei circuiti. Essa è simmetrica e può essere ottenuta con semplici osservazioni: in particolare, l'elemento  $a_{i,i}$  risulta uguale a -4; l'elemento  $a_{i,j}$  è pari a 1 se i nodi  $i$  e  $j$  sono connessi tramite un braccio del reticolo e nulli se essi non sono collegati. L'elemento  $b_i$  del vettore dei termini noti risulta pari all'opposto della

somma algebrica dei potenziali dei nodi del contorno collegati al nodo  $i$ -esimo. La soluzione del sistema (8) si può quindi ottenere per inversione diretta:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (9)$$

Le caratteristiche della matrice  $\mathbf{A}$  consentono una inversione non eccessivamente onerosa almeno fino a quando le dimensioni del sistema e quindi della matrice da invertire non siano eccessive.

### Metodo iterativo

Tale metodo prevede che inizialmente al potenziale di tutti i nodi interni, opportunamente ordinati, sia assegnato un valore di tentativo, ad esempio pari a zero. La (7) o quella equivalente per l'eq. di Poisson, viene quindi applicata a tutti i nodi interni (quelli sulla frontiera hanno potenziale fissato ed invariabile) ottenendo così una prima stima approssimata del potenziale. Si procede quindi ad iterazioni successive che forniranno stime sempre più accurate del potenziale. Al fine di accelerare la procedura, al passo  $k$ -esimo, si possono utilizzare, anziché tutti i potenziali del passo  $k-1$ , i valori già aggiornati del potenziale dei nodi circostanti; nell'ipotesi cioè che la matrice dei potenziali venga aggiornata fissando l'indice di riga e variando quello di colonna si ha:

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} [V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^{k+1} + V_{i,j-1}^{k+1}]$$

Come criterio di fine della procedura di calcolo potrà essere imposto che la differenza nel valore del potenziale nello stesso nodo a due iterazioni successive risulti inferiore ad una quantità prefissata sufficientemente piccola. Risulta evidente che la convergenza della procedura alla soluzione risulta dipendente anche dalla "bontà" della assegnazione iniziale del potenziale dei nodi interni.

### Metodo del rilassamento

Tale metodo si basa ancora su un approccio di tipo iterativo. Anch'esso prevede che inizialmente al potenziale di tutti i nodi interni, opportunamente ordinati, sia assegnato un valore di tentativo, ad esempio pari a zero. La stima della bontà della valutazione del potenziale nei nodi interni al  $(k+1)$ -esimo passo della procedura viene effettuata attraverso il cosiddetto residuo del nodo

$$R_{i,j}^{k+1} = \alpha \cdot [V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k - 4V_{i,j}^k]$$

dove  $\alpha$  è il cosiddetto fattore di rilassamento, in generale maggiore di 1. Il potenziale di ogni nodo viene modificato riducendo (processo di rilassamento) a zero il residuo corrispondente. La procedura termina quando tutti i residui sono nulli o quando il massimo di essi risulta inferiore ad un  $\varepsilon$  prefissato. Anche in questo caso la convergenza della procedura alla soluzione dipende dalla "bontà" della assegnazione iniziale del potenziale e dalla scelta ottimale del fattore di rilassamento.