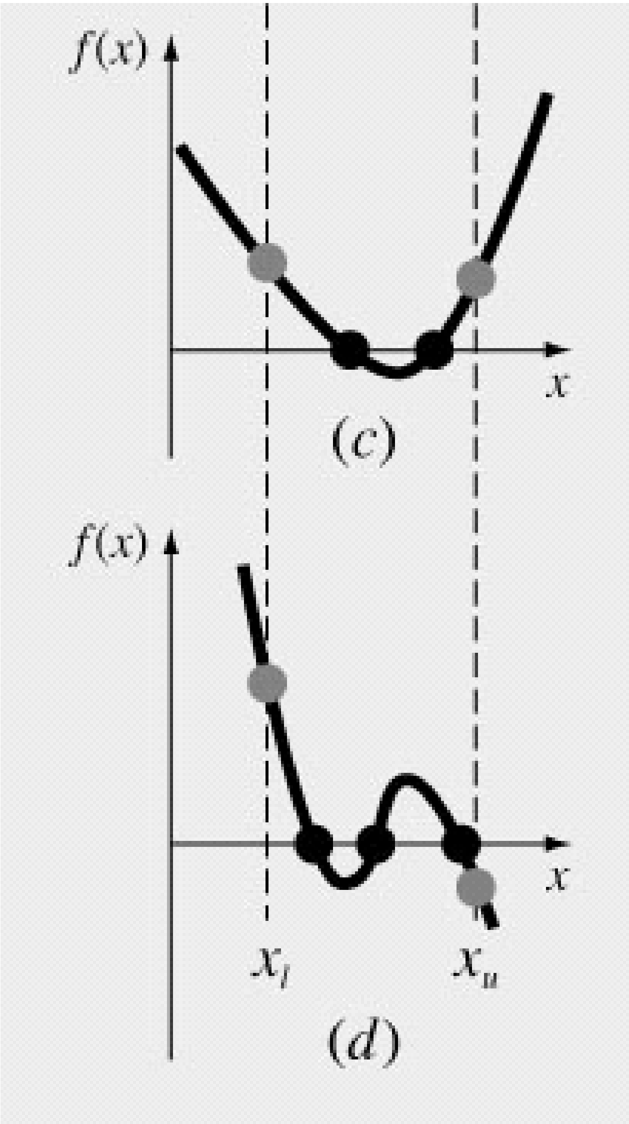
Metodi per la soluzione di equazioni non lineari

Metodo della ricerca incrementale, metodo di bisezione e metodo della secante



Bracketing methods

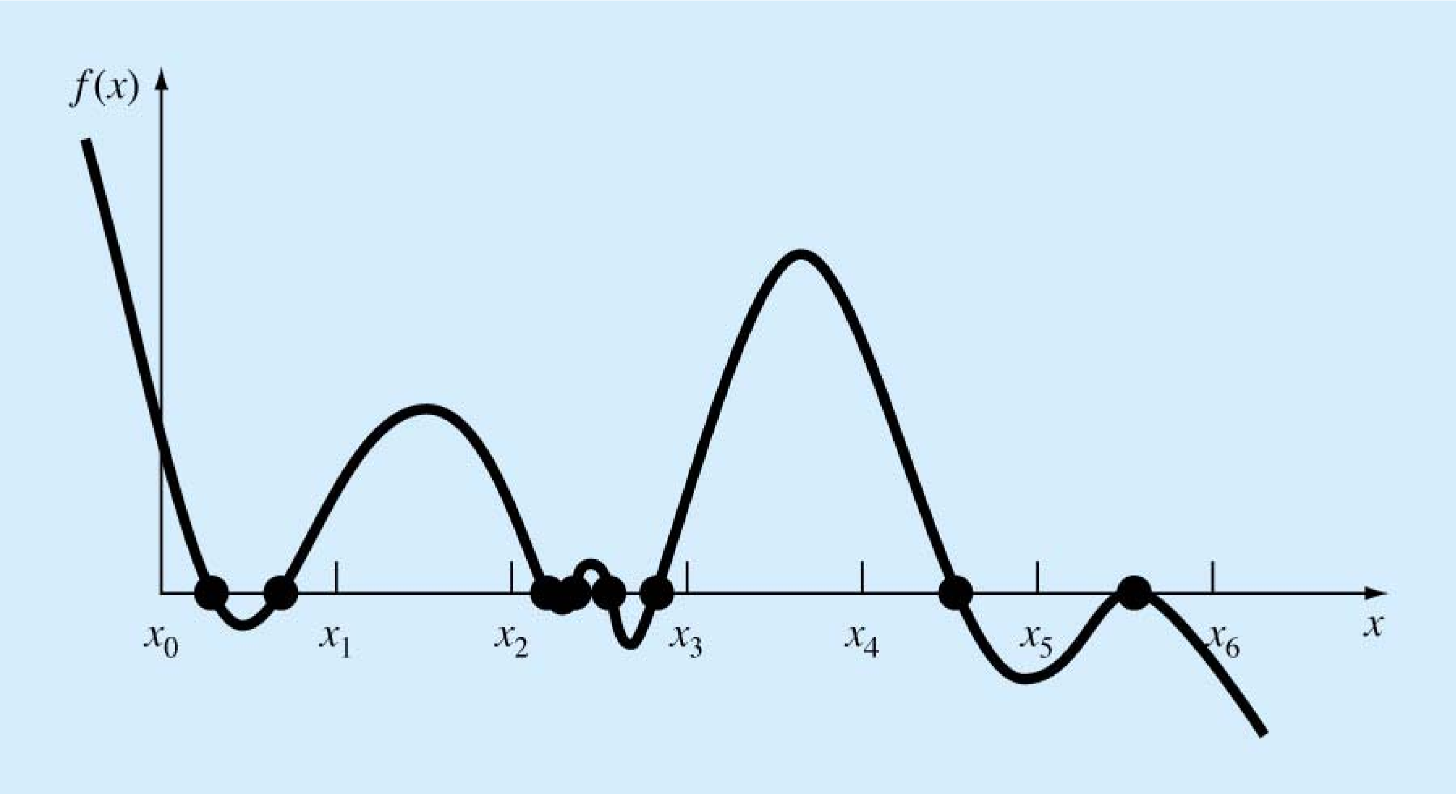
Per una funzione continua *f(x)* in un intervallo [a,b], se $f(a)f(b) \leq 0$, allora

esiste un $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0)=0$.

Metodo della Ricerca Incrementale

Si valuta *f(x)* per valori crescenti di *x*

Se cambia il segno di *f(x)*, ***allora si è individuata una radice***



Esempio: metodo della ricerca incrementale

Trovare l'intervallo di ampiezza 0.1 per la prima radice della funzione:

$$f(x) = 4.905x^2 - 15x + 5$$

La radice è nell'intervallo [0.3,0.4]

x_i	$f(x_i)$
0	5
0.1	3.54905
0.2	2.1962
0.3	0.94145
0.4	-0.2152
0.5	-1.27375
0.6	-2.2342
0.7	-3.09655

Esempio: incrementare l'accuratezza

Partendo da 0.3 incrementare l'ampiezza dell'intervallo

$$\Delta x = 0.01$$

Nuovo zero nell'intervallo: [0.38,0.39]

x_i	$f(x_i)$
0.3	0.94145
0.31	0.821371
0.32	0.702272
0.33	0.584155
0.34	0.467018
0.35	0.350862
0.36	0.235688
0.37	0.121495
0.38	0.008282
0.39	-0.10395
0.4	-0.2152

Esempio: ulteriore incremento di accuratezza

Partendo da 0.38 incrementare l'ampiezza dell'intervallo

$$\Delta x = 0.001$$

Nuova radice in: [0.380,0.381]

Errore relativo:

x_i	$f(x_i)$
0.38	0.008282
0.381	-0.00299
0.382	-0.01424
0.383	-0.02549
0.385	-0.04796
0.386	-0.05917

Il concetto di errore

Al passo 1: [0.30,0.40]->0.35

Al passo 2: [0.38,0.39]->0.385

Al passo 3: [0.380,0.381]->0.3805

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\% = \left| \frac{0.385 - 0.35}{0.385} \right| 100\% = 9.1\%$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\% = \left| \frac{0.3805 - 0.385}{0.3805} \right| 100\% = 1.2\%$$

Errori per la stima della convergenza

Si può definire l'errore relativo approssimato:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| \cdot 100\%$$

ed il "vero" errore relativo (se si conosce la soluzione):

$$\varepsilon_t = \left| \frac{x_t - x_r}{x_t} \right| \cdot 100\%$$

dove con x_r^{new} ed x_r^{old} si esprimono le soluzioni al passo corrente ed a quello precedente, con x_r la soluzione al passo r-esimo e con x_t la soluzione "vera".

Metodo di bisezione

✓Semplice

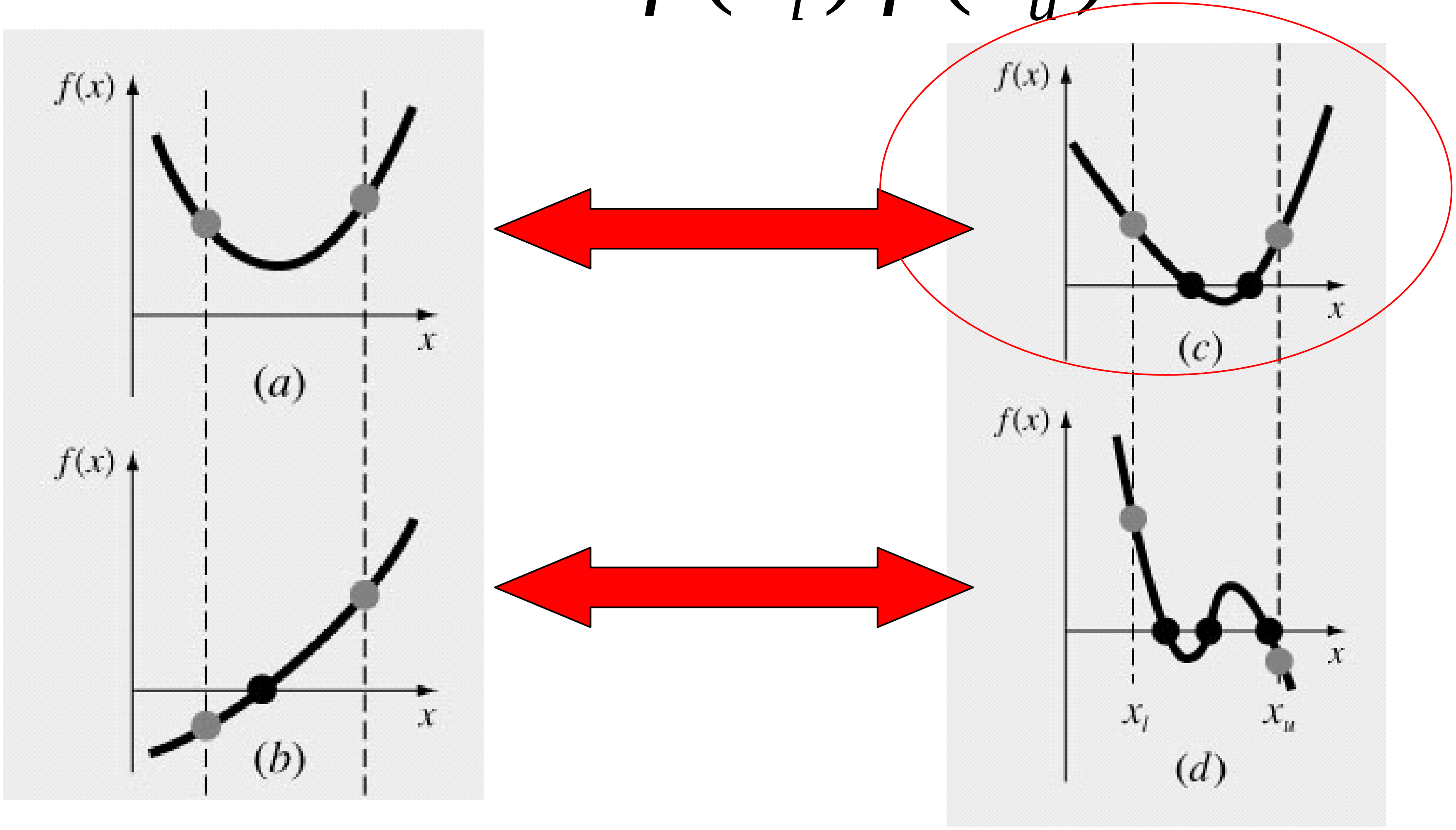
✓Robusto

✓Necessità di due soluzioni iniziali x_l e x_u che confinano la radice cercata

Deve esistere almeno una radice tra x_l e x_u se:

$$f(x_l)\,f(x_u) < 0$$

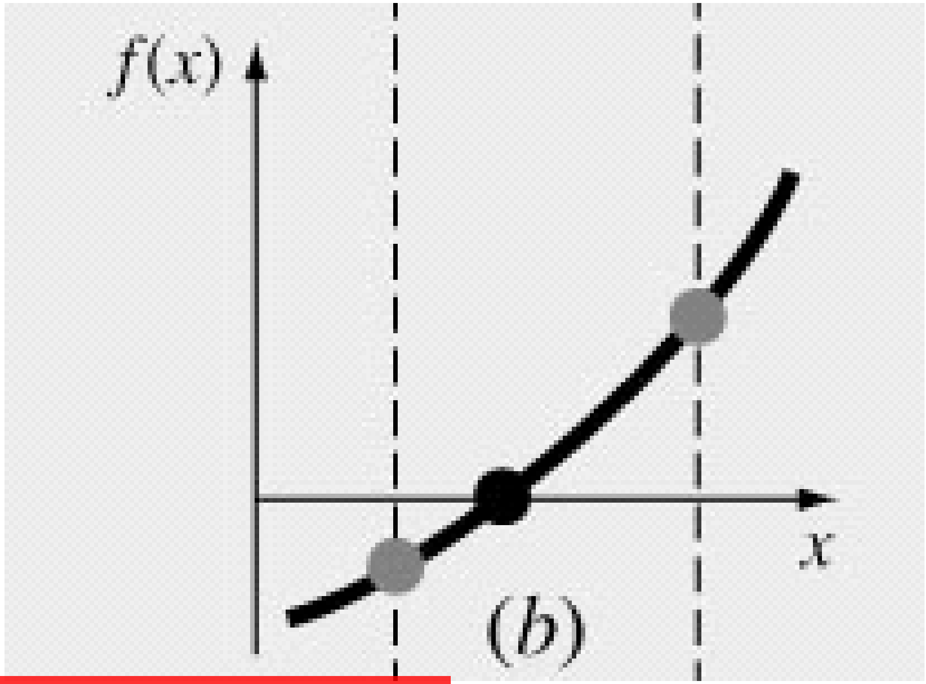
Cosa significa $f(x_l)\,f(x_u) < 0$?



Algoritmo di bisezione

Scegliere x_l e x_u

Stimare la radice x_r



Valutare $$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

$$f(x_l)f(x_r) < 0 \quad \text{porre} \quad x_u = x_r$$

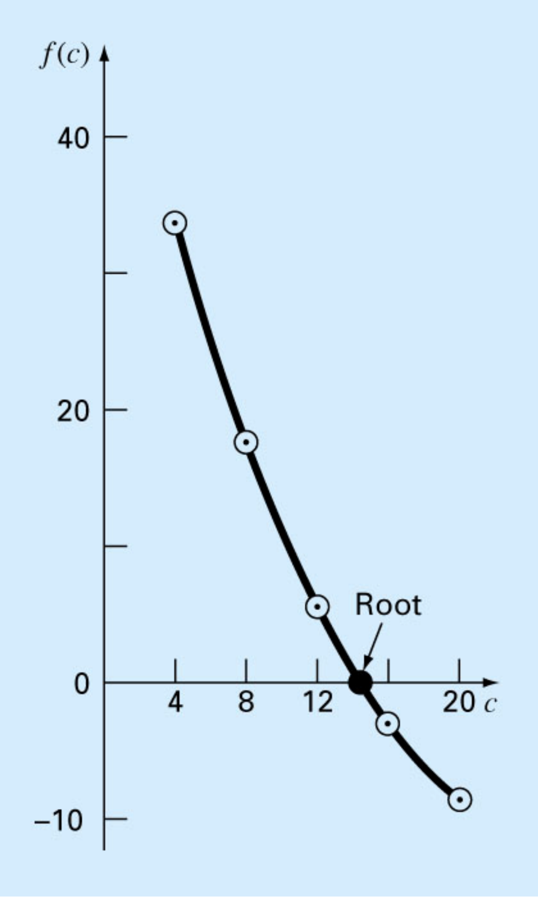
$$f(x_l)f(x_r) > 0 \quad \text{porre} \quad x_l = x_r$$

$$f(x_l)f(x_r) = 0 \quad \rightarrow \quad x_r \text{ è la radice}$$

Esempio: calcolo di una radice mediante il metodo della bisezione

Funzione: $f(c) = \frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) - 40$

c	$f(c)$
4	34.115
8	17.653
12	6.067
16	-2.269
20	-8.401



Trovare la radice compresa in [4,20]

Ricerca con la bisezione in [12,16]

$$x_r = \frac{12+16}{2} = 14$$

$$f(12)\,f(14) = 6.067(1.569) = 9.157 > 0 \quad \Rightarrow \text{radice in } [14,16]$$

$$x_r = \frac{14+16}{2} = 15$$

$$f(14)\,f(15) = 1.569(-0.425) = -0.666 < 0 \quad \Rightarrow \text{radice in } [14,15]$$

$$x_r = \frac{14+15}{2} = 14.5$$

$$\ldots$$

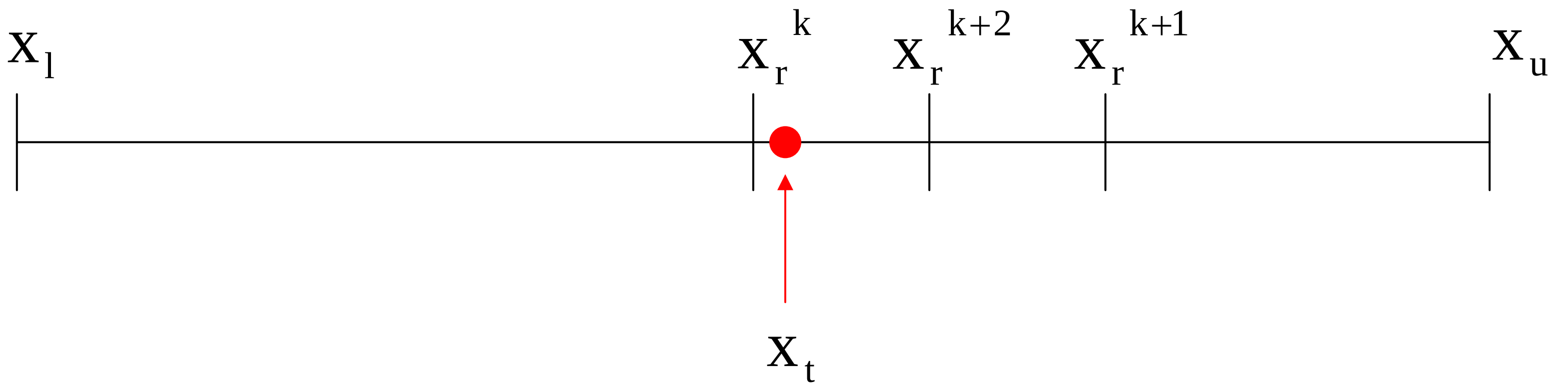
La soluzione è 14.7802

Stima dell'errore del metodo di bisezione

- Ad ogni iterazione: $\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| \cdot 100\%$ $\quad \varepsilon_t = \left| \frac{x_t - x_r}{x_t} \right| \cdot 100\%$

r	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	12	16	14		5.279
2	14	16	15	6.667	1.487
3	14	15	14.5	3.448	1.896
4	14.5	15	14.75	1.695	0.204
5	14.75	15	14.875	0.840	0.641
6	14.75	14.875	14.8125	0.422	0.219

Stima dell'errore relativo



Errore all'iterazione N-esima

$$U_0 - L_0$$

$$U_1 - L_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 - L_0\right)$$

$$U_2 - L_2 = \frac{1}{2}\left(U_1 - L_1\right) = \frac{1}{4}\left(U_0 - L_0\right)$$

$$U_3 - L_3 = \frac{1}{2}\left(U_2 - L_2\right) = \frac{1}{4}\left(U_1 - L_1\right) = \frac{1}{8}\left(U_0 - L_0\right)$$

…

$$U_N - L_N = \frac{1}{2^N}\left(U_0 - L_0\right)$$

$$\varepsilon \le \frac{\left|U_0 - L_0\right|}{2^N}$$

Errore nella valutazione della radice dopo N iterazioni

Numero di iterazioni per un prefissato errore

$$\varepsilon \le \frac{\left|U_0 - L_0\right|}{2^N} \rightarrow 2^N \le \frac{\left|U_0 - L_0\right|}{\varepsilon}$$

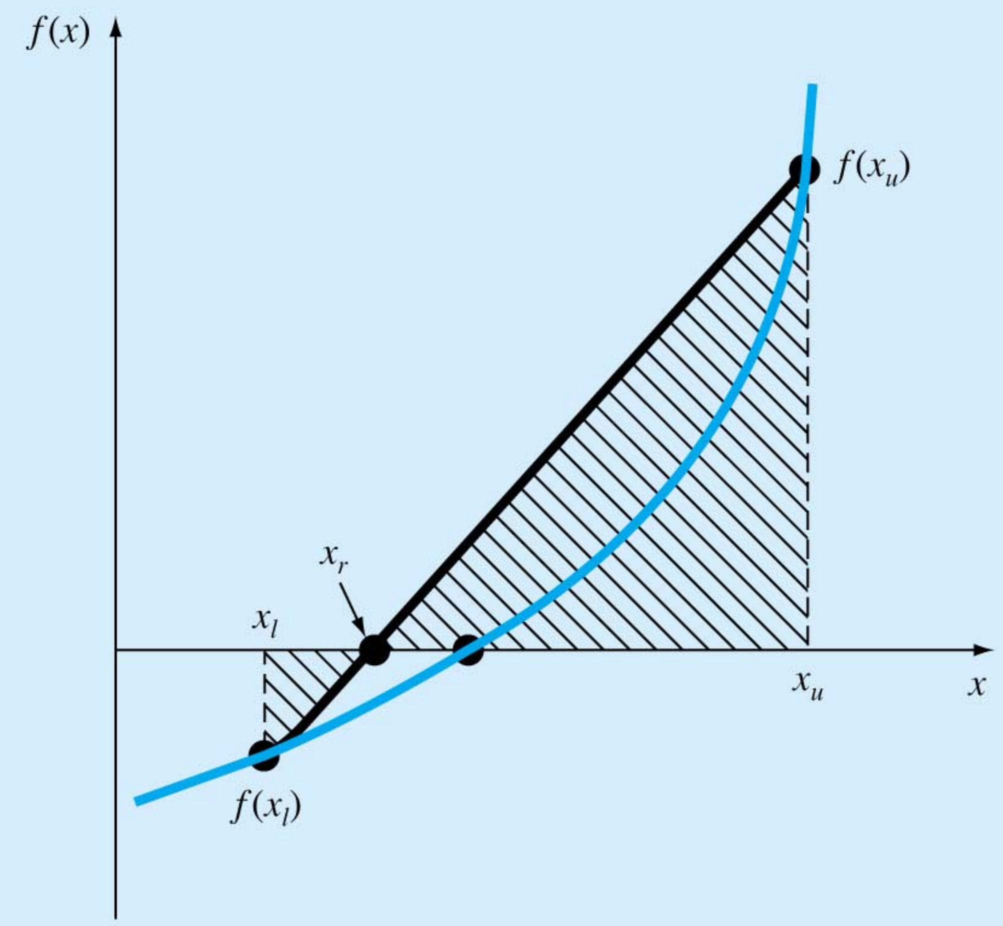
$$N \cdot \ln 2 \le \ln\left(\frac{\left|U_0 - L_0\right|}{\varepsilon}\right) \rightarrow \boxed{N \le \frac{\ln\left(\frac{\left|U_0 - L_0\right|}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}}$$

False position method

Richiede anch'esso due soluzioni iniziali

Viene usata una retta per stimare la posizione della radice

La retta sostituisce la curva nell'intervallo di ricerca e ciò permette di ridurre l'intervallo stesso mediante la valutazione della funzione



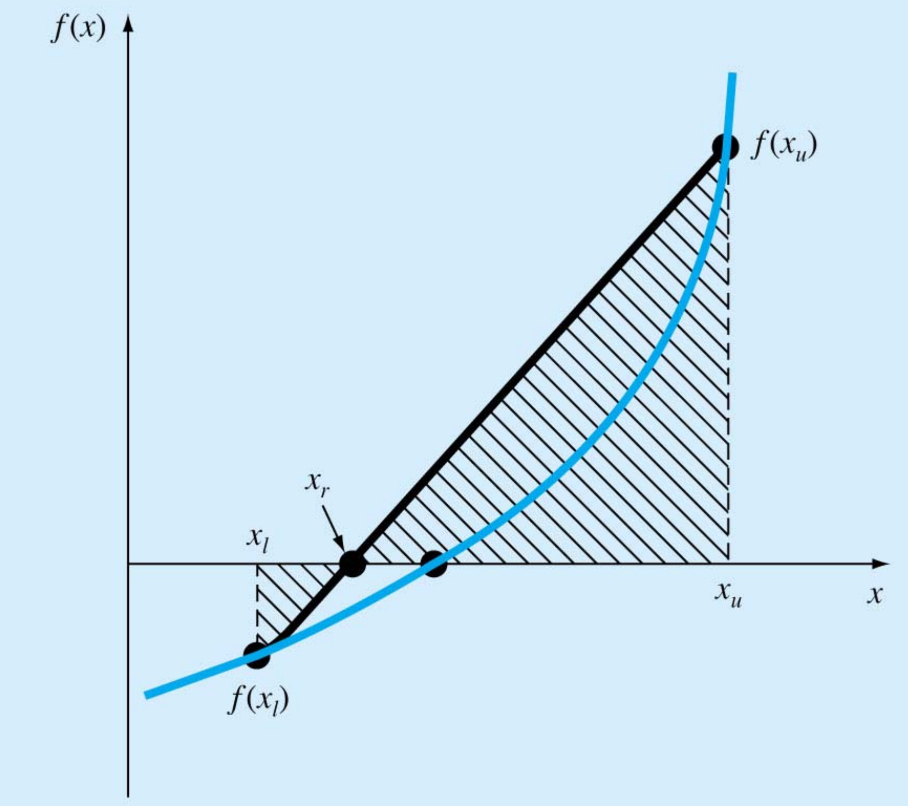
False Position Algorithm

Scegliere x_l e x_u

Stimare la radice x_r

Calcolare:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



$f(x_l)f(x_r) < 0$ porre $x_u = x_r$

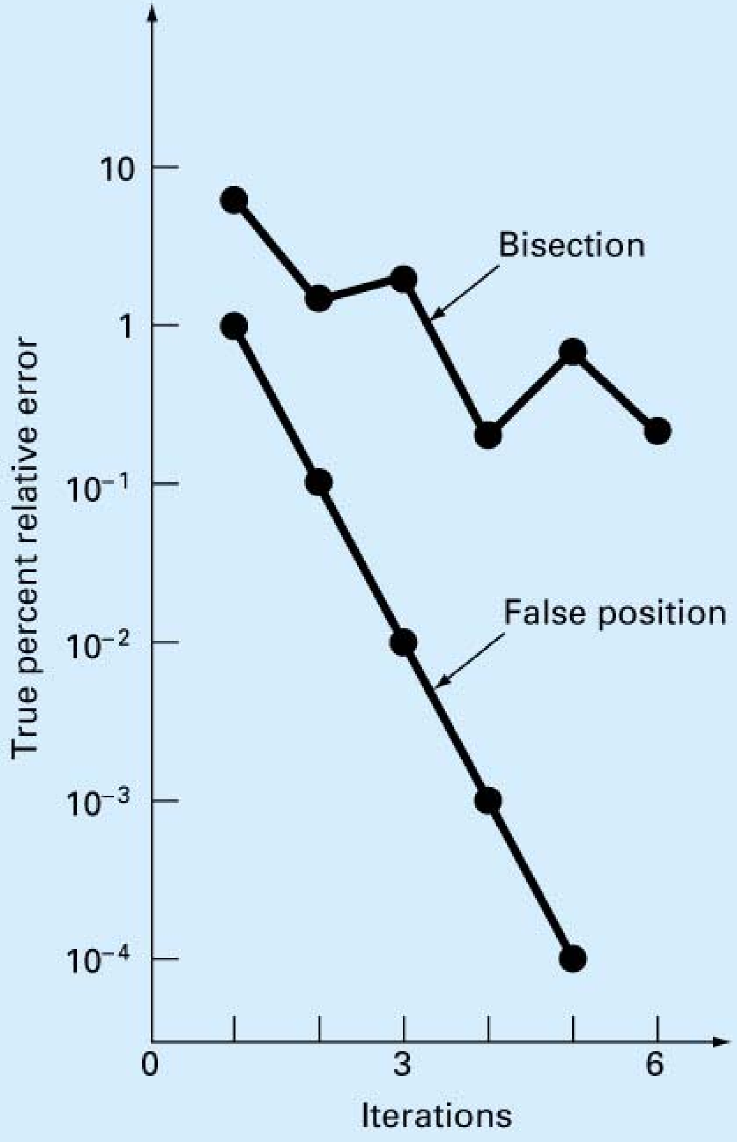
$f(x_l)f(x_r) > 0$ porre $x_l = x_r$

$f(x_l)f(x_r) = 0 \quad \rightarrow \quad x_r$ è la radice

Soluzione ed Accuratezza

La convergenza è garantita dal fatto che la soluzione rimane confinata tra i limiti inferiore e superiore nel corso dell'iterazione.

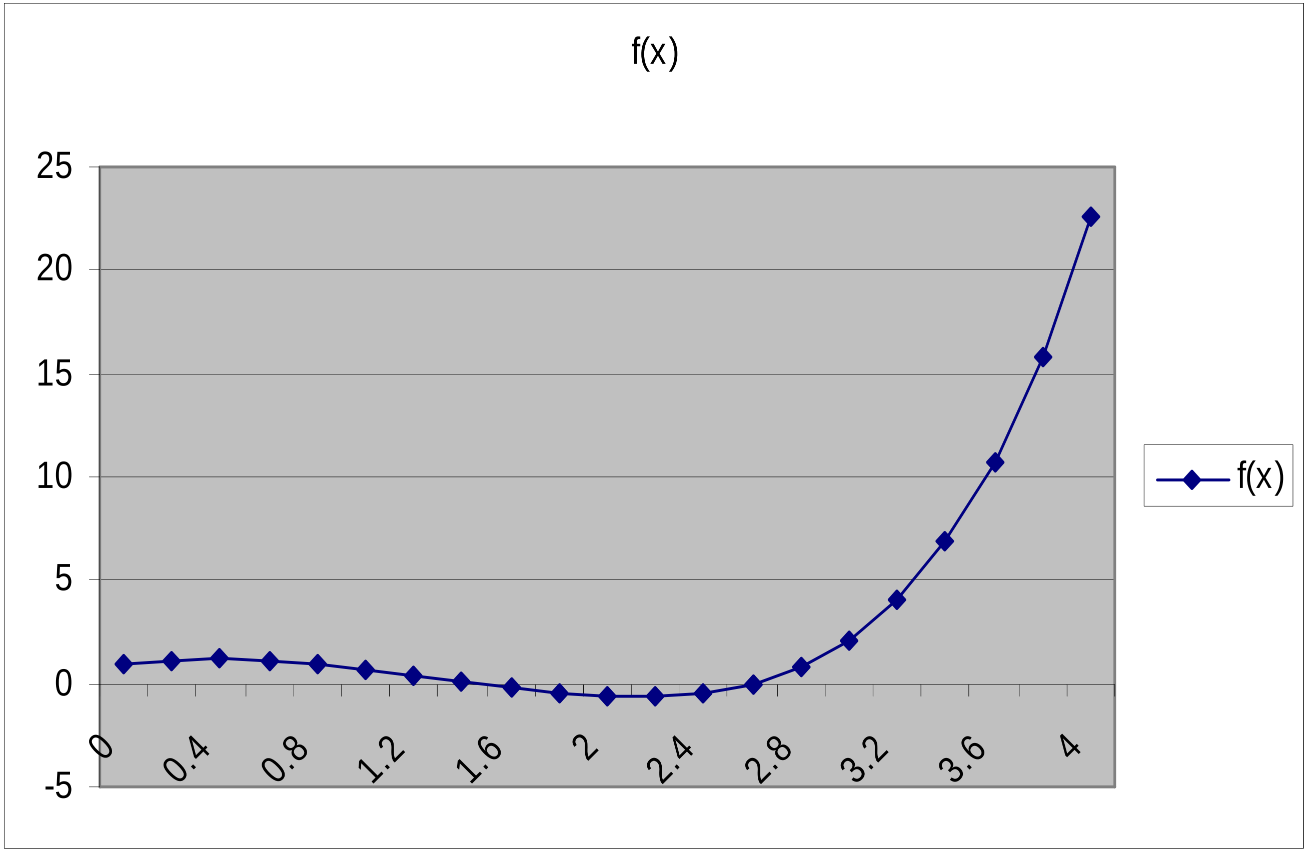
La velocità di convergenza è maggiore di quella che si ottiene con la bisezione.



Esempio: False Position Method

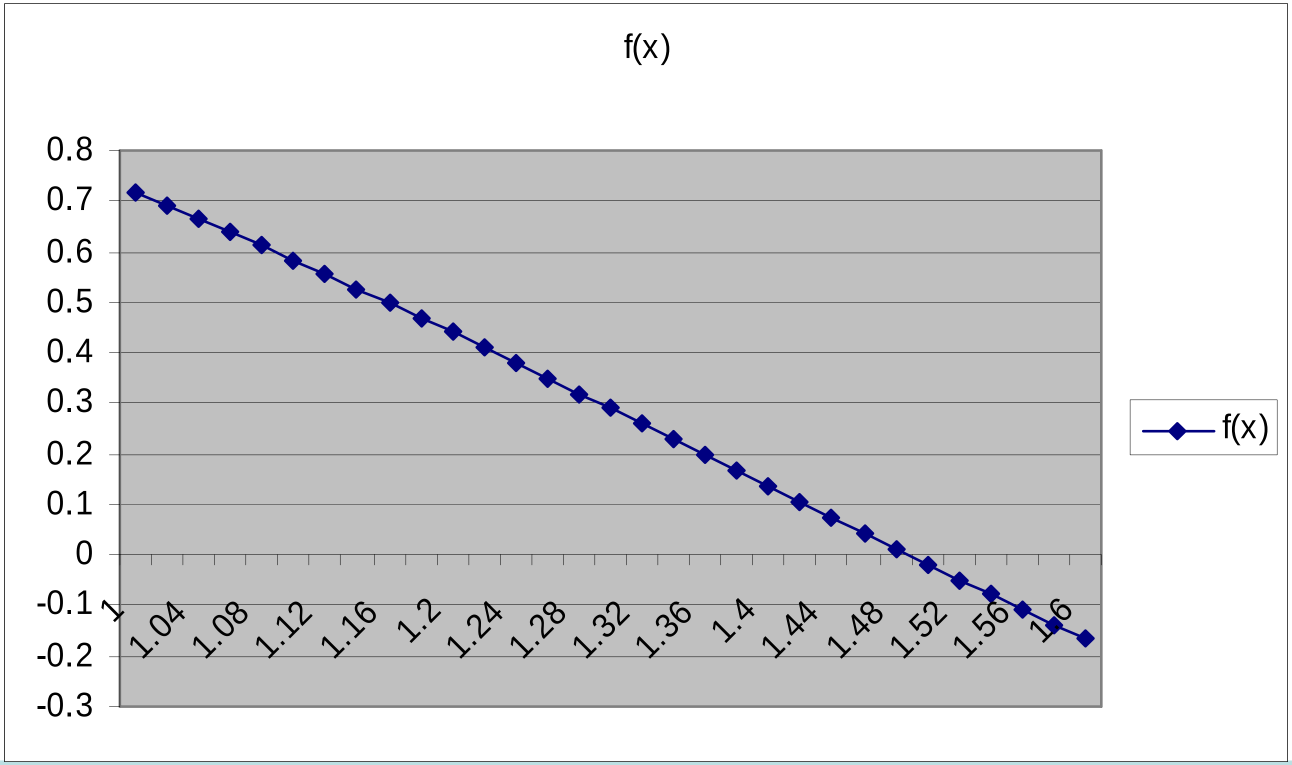
$$f(x) = e^{x} - 2x^{2} = 0$$

Trovare la radice più vicina ad *x=0* ***con una accuratezza di*** 4 cifre.



Determinazione dell'intervallo

Si applica una ricerca incrementale in [0,2] e il false position method nell'intervallo [1.0,1.5]



x	f(x)
0	1
0.5	1.148721
1	0.718282
1.5	-0.01831
2	-0.61094

Soluzione: x_r = 1.488

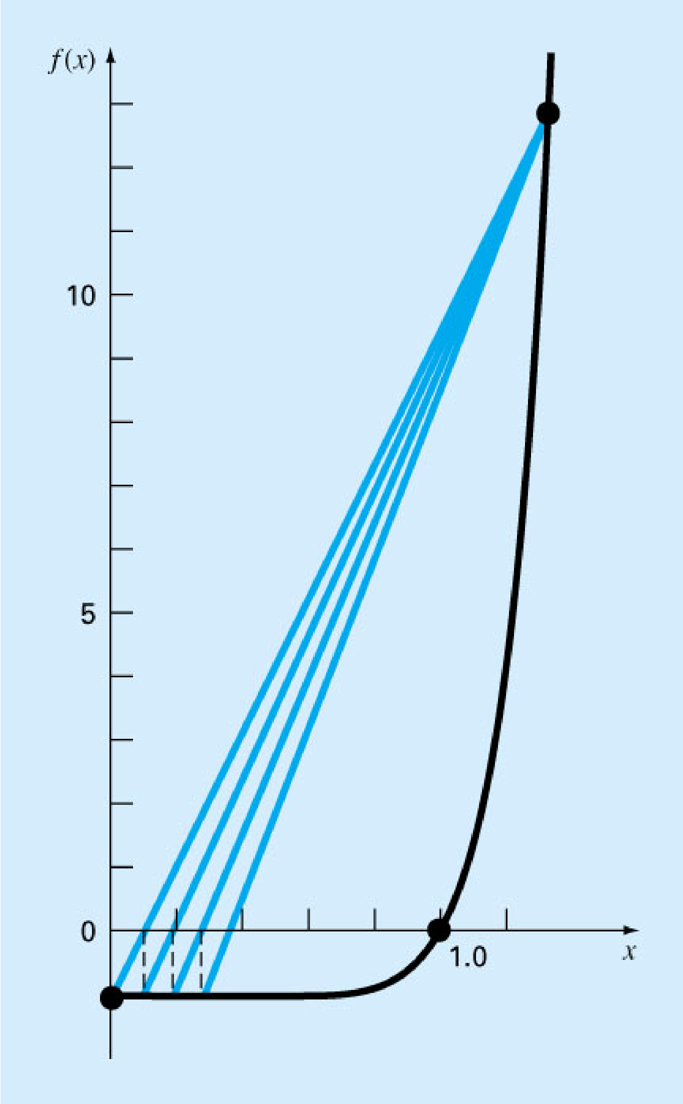
n	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	ε
1	1.0	1.5	0.718	-0.0183	1.4876	0.00055	
2	1.4876	1.5	0.00055	-0.0183	1.48796	0.000003	0.0002

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\% = \left| \frac{1.48796 - 1.4876}{1.48796} \right| 100\% = 0.02\%$$

Un controesempio…

Vi sono casi in cui la bisezione supera la False Position in termini di velocità di convergenza.

$f(x) = x^{10} - 1$ In x=[0,1.3]



Confronto (x_t=1.0)

False Position Method

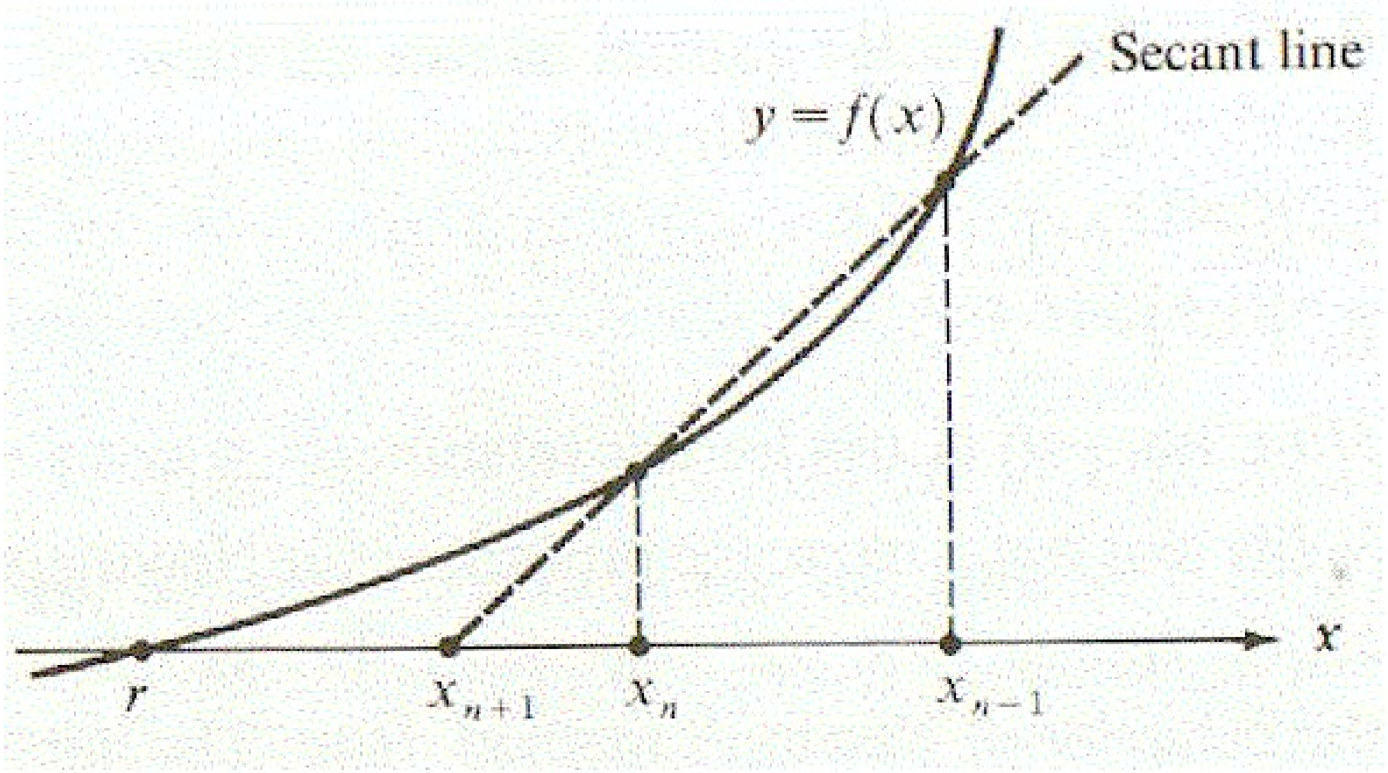
Iteration	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	0	1.3	0.09430		90.6
2	0.09430	1.3	0.18176	48.1	81.8
3	0.18176	1.3	0.26287	30.9	73.7
4	0.26287	1.3	0.3381	22.3	66.2
5	0.3381	1.3	0.40788	17.1	59.2

Bisezione

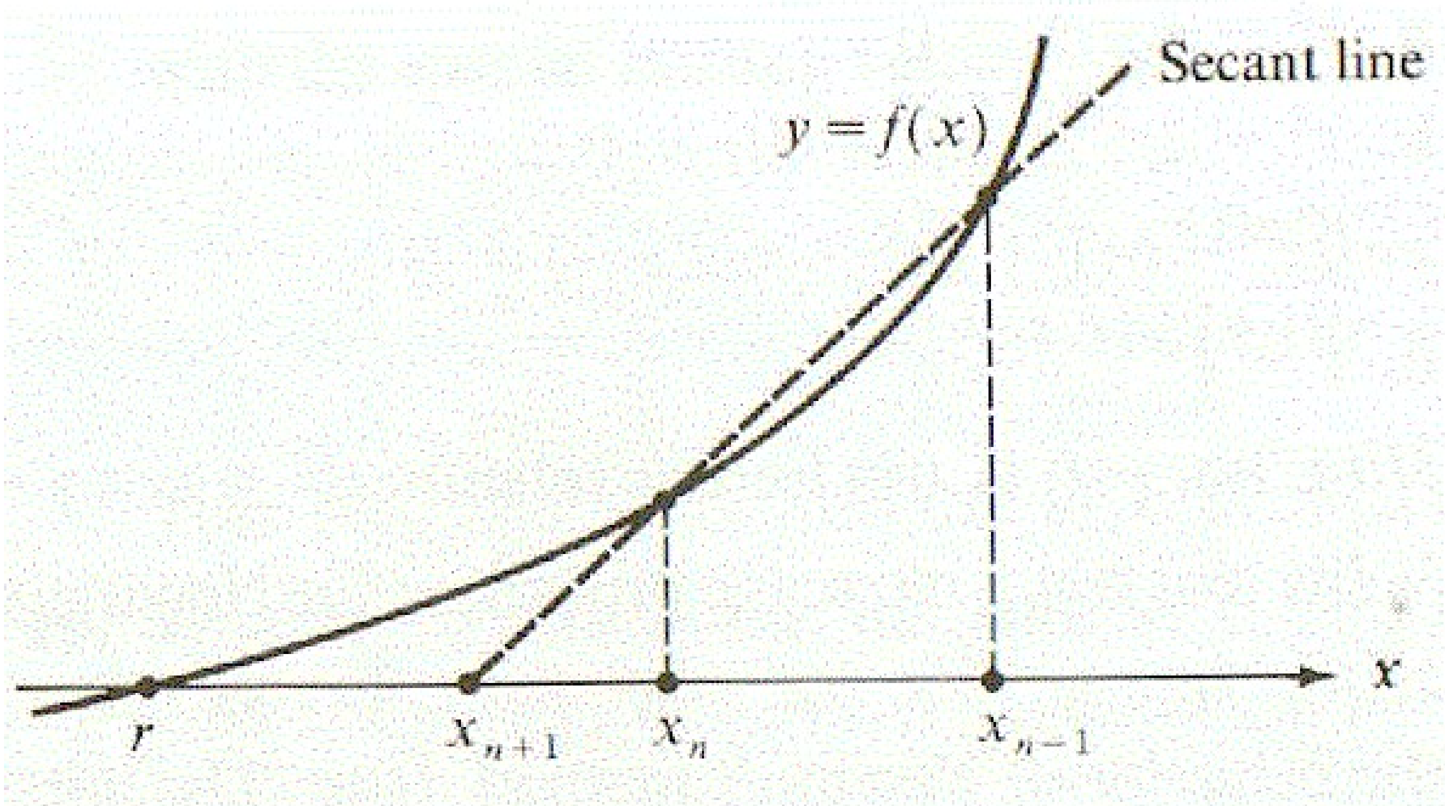
Iteration	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	0	1.3	0.65	100	35
2	0.65	1.3	0.975	33.3	2.5
3	0.975	1.3	1.1375	14.3	13.8
4	0.975	1.1375	1.05625	7.7	5.6
5	0.975	1.05625	1.015625	4.0	1.6

Metodo della secante

Fa parte degli "slope methods" e richiede solo la valutazione della funzione, non della sua derivata.



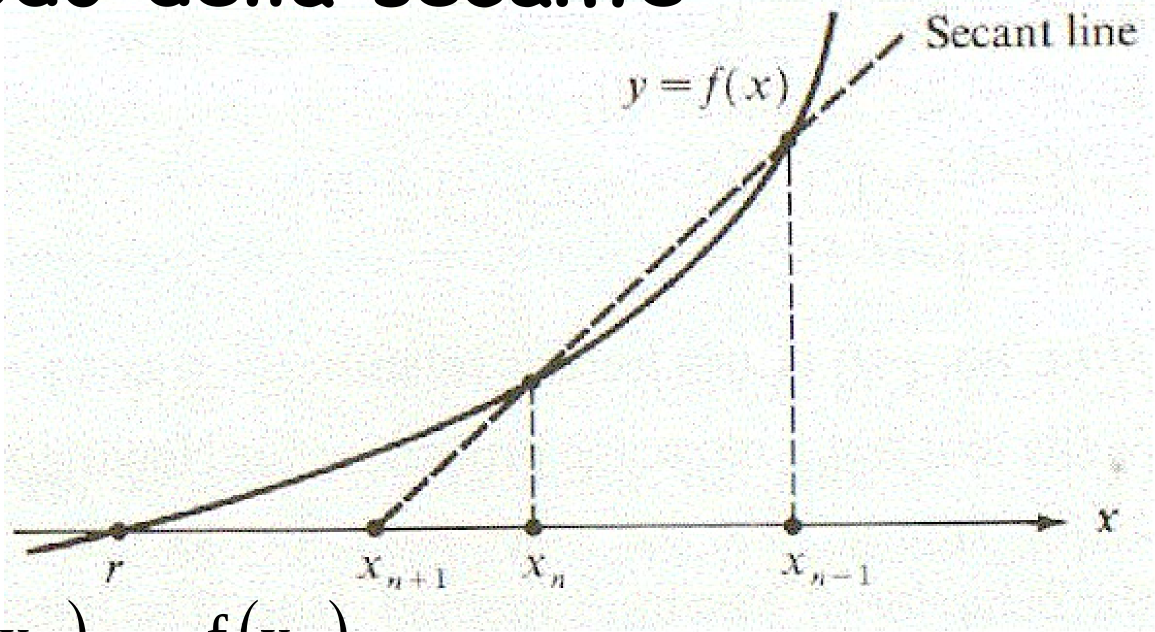
Metodo della secante



pendenza

$$m = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$$

Metodo della secante



$$f(x_{n+1}) = 0 \rightarrow \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - (x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}}$$

Metodo della secante

Richiede una valutazione della funzione ad ogni passo dell'iterazione

Può non convergere al pari dell'algoritmo Newton-Raphson