

Obiettivo:

apprendere gli elementi basilari delle tecniche numeriche per la soluzione di equazioni e sistemi di equazioni non-lineari;

Strumenti:

ambienti di simulazione general purpose

“Pretesti”:

analisi di un elettromagnete e di una stringa di pannelli fotovoltaici

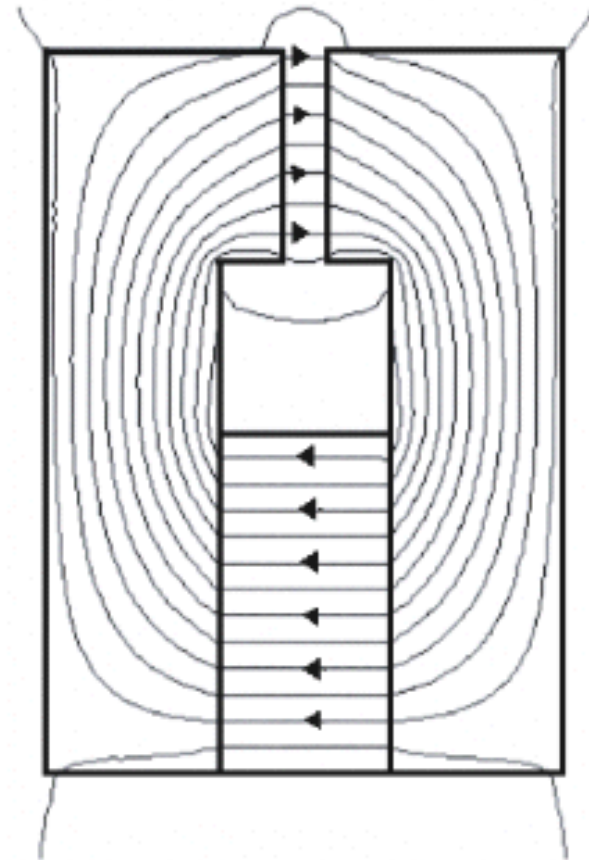
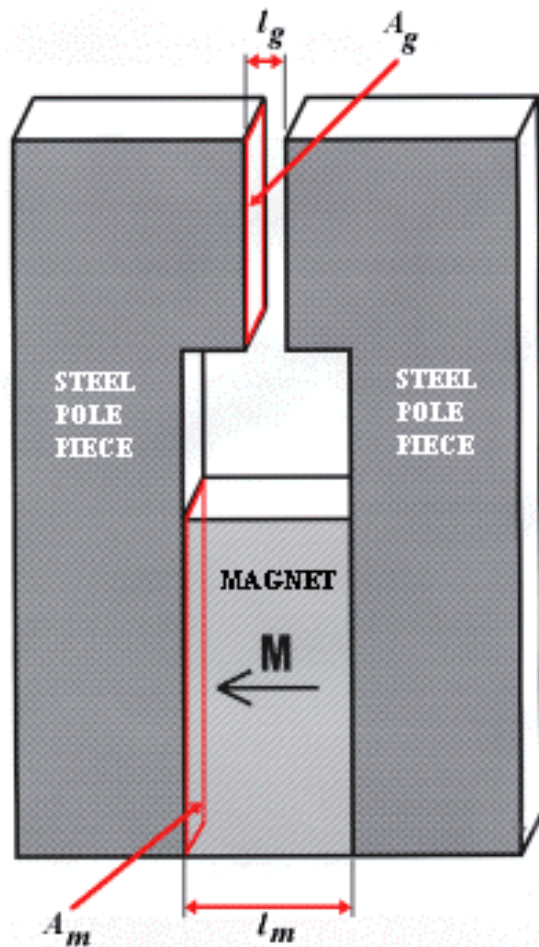


Algoritmi per la soluzione di equazioni non lineari: teoria ed applicazioni



Prof. G. Spagnuolo - D.I.I.I.E. - Università di Salerno

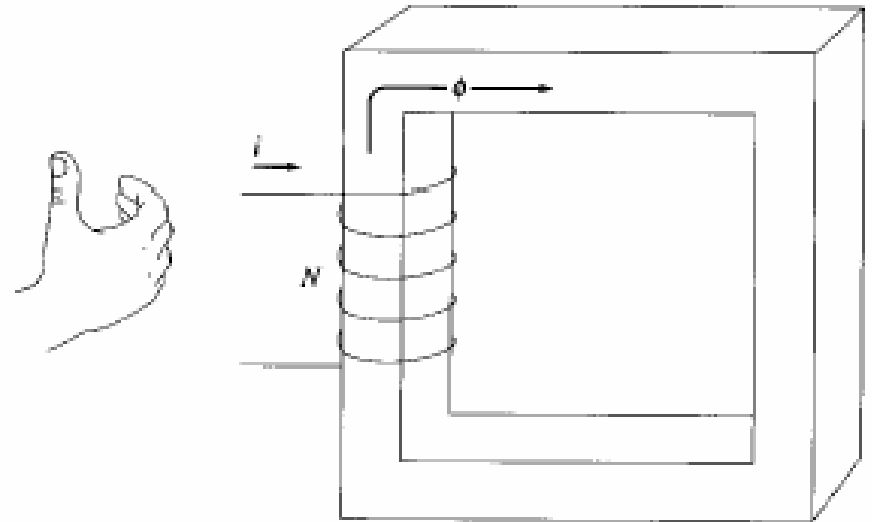
Partiamo dall'applicazione: i circuiti magnetici



Direzione delle linee del campo

Viene determinata mediante la regola della mano destra.

Il flusso Φ è determinato dalla corrente stazionaria i che attraversa le N spire.



Equazioni fondamentali

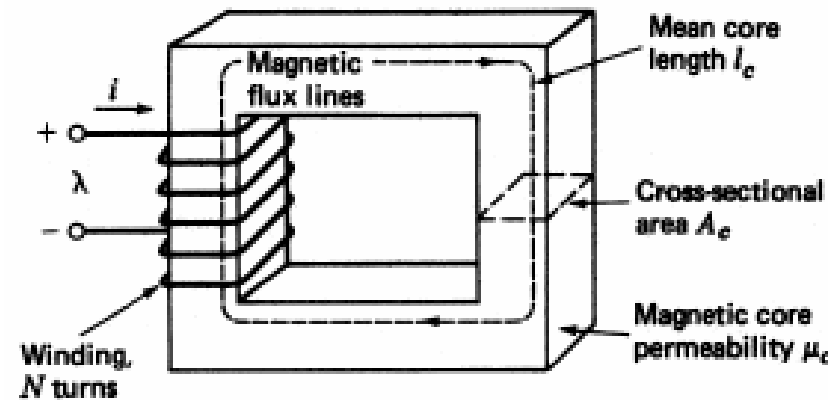
La linea γ corrisponde al percorso delle linee del campo.
La superficie S è la sezione del conduttore.

La superficie A_c è la sezione del nucleo.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H}_{fe} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

$$\mathbf{B}_{fe} = \mu_{fe} \mathbf{H}_{fe}$$

$$\Phi_{fe} = \iint_{A_c} \mathbf{B}_{fe} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$



Ipotesi semplificative

- Il materiale è lineare ed ha permeabilità magnetica molto elevata ($\mu_{fe} \rightarrow \infty$);
- Il nucleo di materiale ferromagnetico ha sezione costante (A_c);
- Le dimensioni e la frequenza di lavoro sono tali da poter trascurare la corrente di spostamento nelle equazioni di Maxwell (il nucleo ha resistività così elevata che le eventuali correnti indotte in esso da campi rapidamente variabili sono trascurabili).



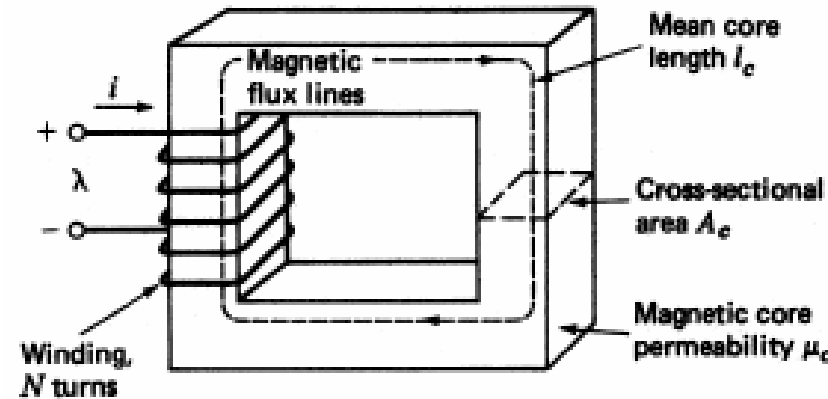
Equazioni semplificate (1/3)

Se il campo \mathbf{H} è completamente confinato nel nucleo di sezione costante, il nucleo stesso è un tubo di flusso.

In tal caso, \mathbf{H} non ha componente normale alla superficie del nucleo, ma solo componente tangenziale, quindi parallela a $d\mathbf{l}$.

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H}_{fe} \cdot d\mathbf{l} = H_{fe} l$$

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = Ni$$

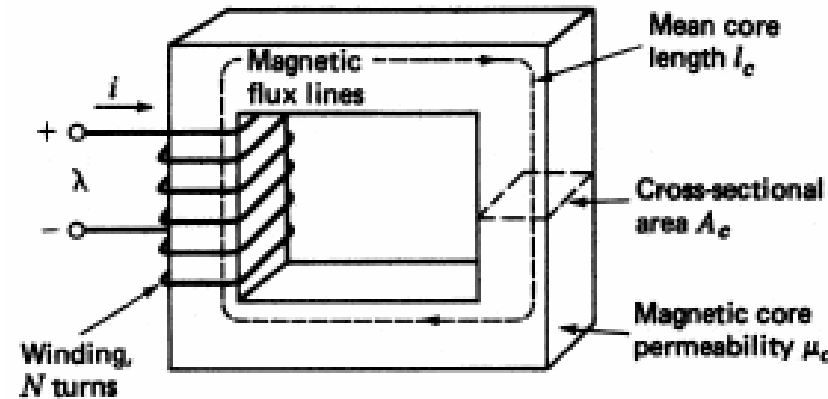


Equazioni semplificate (2/3)

Se \mathbf{B}_{fe} ed \mathbf{H}_{fe} sono paralleli ($\mathbf{B}_{fe} = \mu_{fe} \mathbf{H}_{fe}$), \mathbf{B} è parallelo alla normale alla sezione del nucleo.

Inoltre, se il nucleo è a sezione costante, il campo \mathbf{B}_{fe} si può ritenere uniforme, ovvero costante, sulla sezione del nucleo.

$$\Phi_{fe} = \iint_{A_c} \mathbf{B}_{fe} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = B_{fe} A_c$$



Equazioni semplificate (3/3)

$$\left. \begin{array}{l} H_{fe} l = Ni \\ \Phi_{fe} = B_{fe} A_c \\ B_{fe} = \mu_{fe} H_{fe} \end{array} \right\} \rightarrow \Phi_{fe} = \mu_{fe} H_{fe} A_c = \mu_{fe} \frac{Ni}{l} A_c = \frac{Ni}{l / (\mu_{fe} A_c)} = \frac{F}{R}$$

$$F = Ni$$

F = forza magneto-motrice [Amperspire]

$$R = \frac{l}{\mu_{fe} A_c}$$

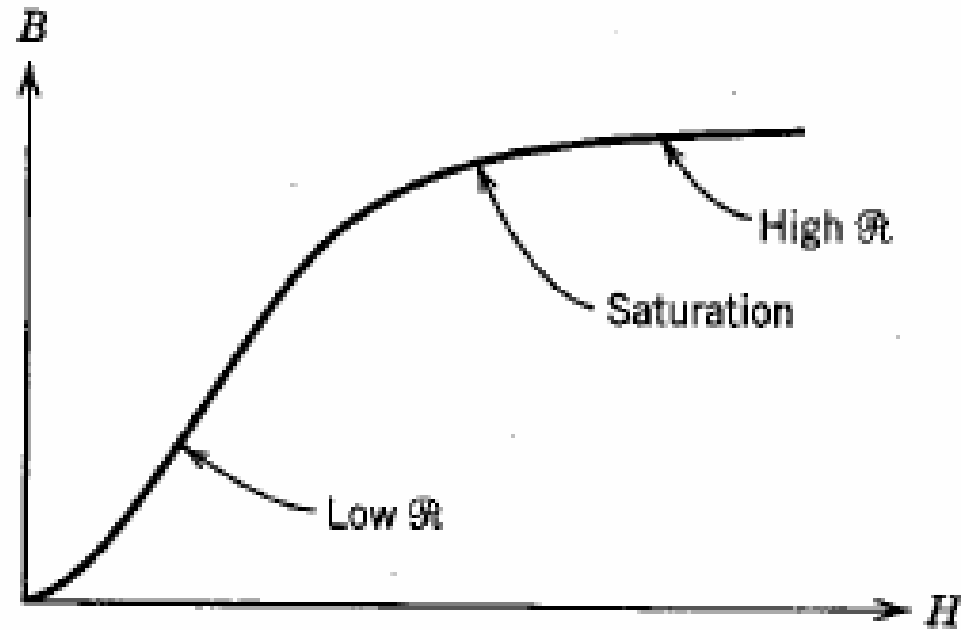
R = riluttanza [Henry⁻¹]

$$\Phi_{fe} = \frac{F}{R}$$

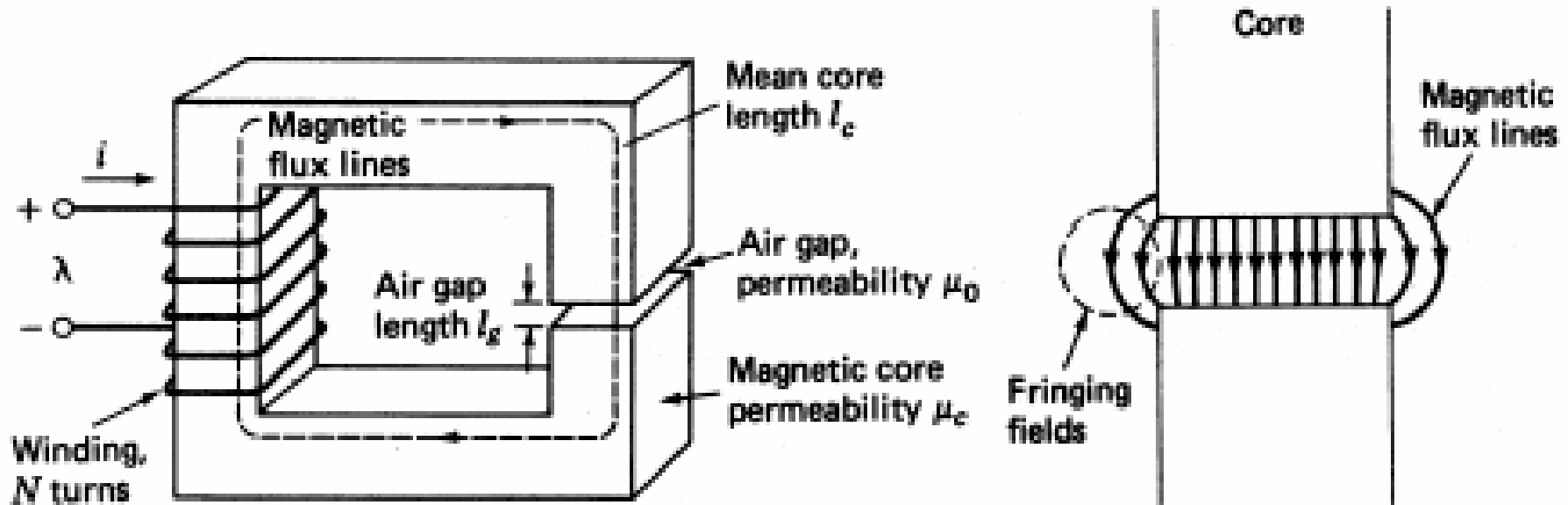


Riluttanza e materiali magnetici

La caratteristica magnetica dei materiali può essere re-interpretata alla luce della definizione di riluttanza



Circuiti magnetici con traferro



Ipotesi semplificative

- La sezione del nucleo è costante;
- Il "fringing flux" viene trascurato: ciò comporta che l'area utile per il flusso nel traferro è uguale all'area utile nel nucleo, ovvero A_c ;
- Il nucleo è caratterizzato da permeabilità elevatissima ($\mu_{fe} \rightarrow \infty$);

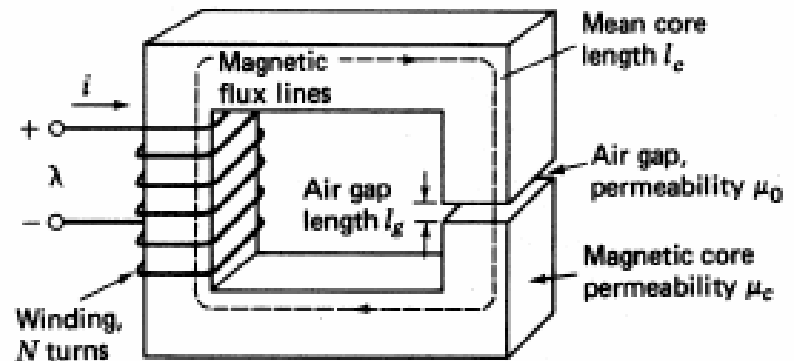


Equazioni fondamentali (1/3)

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H}_{fe} \cdot d\mathbf{l} = H_{fe} l_{fe} + H_{aria} l_{aria}$$

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = Ni$$

$$\mathbf{B}_{fe} = \mu_{fe} \mathbf{H}_{fe} \quad \mathbf{B}_{aria} = \mu_0 \mathbf{H}_{aria}$$



Equazioni fondamentali (2/3)

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0 \rightarrow \Phi_{fe} = \Phi_{aria} = \Phi$$

$$H_{fe} l_{fe} = \frac{B_{fe}}{\mu_{fe}} l_{fe} = \frac{\Phi_{fe}}{A_c \mu_{fe}} l_{fe} = R_{fe} \Phi_{fe}$$

$$H_{aria} l_{aria} = \frac{B_{aria}}{\mu_0} l_{aria} = \frac{\Phi_{aria}}{A_c \mu_0} l_{aria} = R_{aria} \Phi_{aria}$$



Equazioni fondamentali (3/3)

$$H_{fe} l_{fe} + H_{aria} l_{aria} = R_{fe} \Phi_{fe} + R_{aria} \Phi_{aria} = Ni = F$$

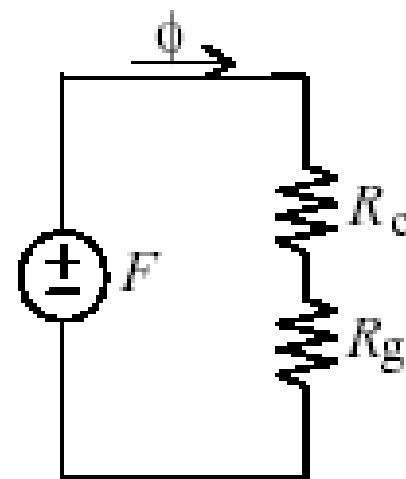
$$(R_{fe} + R_{aria}) \Phi = F$$

$$R_{fe} = \frac{l_{fe}}{A_c \mu_{fe}}$$

$$R_{aria} = \frac{l_{aria}}{A_c \mu_0}$$

R_{fe} = riluttanza del tratto in ferro

R_{aria} = riluttanza del traferro



Analisi di circuiti magnetici

Circuiti elettrici

$$\sum_k \pm I_k = 0$$

$$\sum_k \pm V_k = \sum_k \pm E_k$$

$$V_k = R_k I_k$$

Circuiti magnetici

$$\sum_k \pm \Phi_k = 0$$

$$\sum_k \pm M_k = \sum_k \pm F_k$$

$$M_k = R_k \Phi_k$$

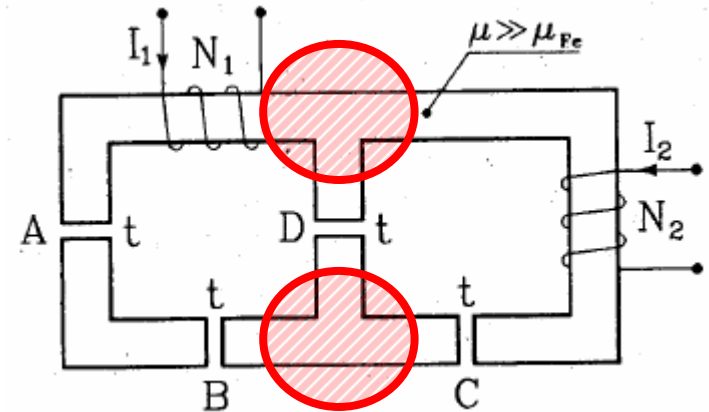


La legge di conservazione del flusso

$$\oiint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \rightarrow \sum_k \pm \Phi_k = 0$$

La solenoidalità del campo \mathbf{B} assicura la conservazione del flusso Φ in ciascun "nodo" del circuito magnetico.

Si ottiene in tal modo la "seconda legge di Hopkinson".



Generalizzazione del concetto di riluttanza

$$\left. \begin{aligned}
 \oint_{\gamma} \mathbf{H}_{fe} \cdot d\mathbf{l} &= Ni \\
 \mathbf{H}_{fe} &= \frac{\mathbf{B}_{fe}}{\mu_{fe}} \\
 \Phi &= B_{fe} A_c
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{B}_{fe}}{\mu_{fe}} \cdot d\mathbf{l} = Ni \rightarrow \oint_{\gamma} \frac{\Phi}{A_c \mu_{fe}} dl = Ni \rightarrow \Phi \oint_{\gamma} \frac{dl}{A_c \mu_{fe}} = Ni$$

$$\Phi \oint_{\gamma} \frac{dl}{A_c \mu_{fe}} = Ni \rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \Phi R_{fe} &= Ni \\
 R_{fe} &= \oint_{\gamma} \frac{dl}{A_c \mu_{fe}}
 \end{aligned} \right.$$

Tali relazioni sono ricavate nel caso di assenza di traferro e nell'ipotesi che il nucleo, costituito di materiale lineare ad altissima permeabilità, rappresenti un tubo di flusso per il campo B_{fe} .



Generalizzazione della seconda legge di Hopkinson

$$R_{fe} = \frac{l}{\mu_{fe} A_c} \rightarrow R_{fe} \Phi_{fe} = F$$

$$R_k = \frac{l_k}{\mu_k A_k} \rightarrow \sum_{k=1}^n R_k \Phi = F$$

In presenza di un circuito magnetico costituito da n tratti, il cui k -esimo sia di lunghezza l_k , sezione e permeabilità magnetica costanti e pari, rispettivamente, a A_k e μ_k , si può comunque generalizzare la II legge di Hopkinson.



Analisi non lineare

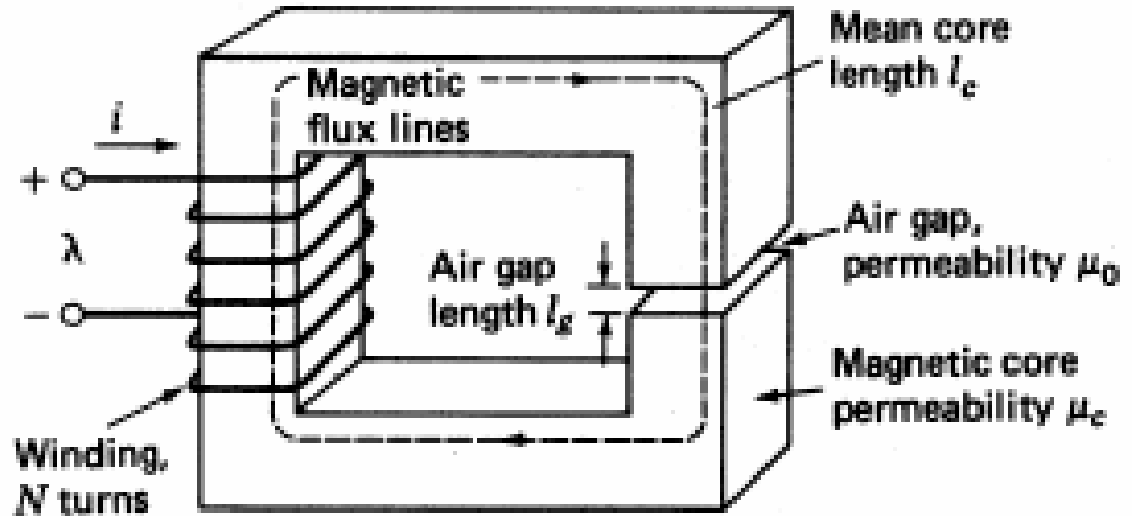
$$L_{\text{aria}} = 0.698 \text{ mm}$$

$$L_{\text{fe}} = 10 \text{ cm}$$

$$I = 10 \text{ A}$$

$$N = 100$$

$$B_{\text{fe}} = ?$$



Si consideri la seguente caratteristica non lineare del materiale:

$$H_{\text{fe}}(B_{\text{fe}}) = 129.5 \cdot B_{\text{fe}} + 76.1 \cdot B_{\text{fe}} \cdot \exp(1.26 \cdot B_{\text{fe}}^2)$$



Analisi grafica (1/2)

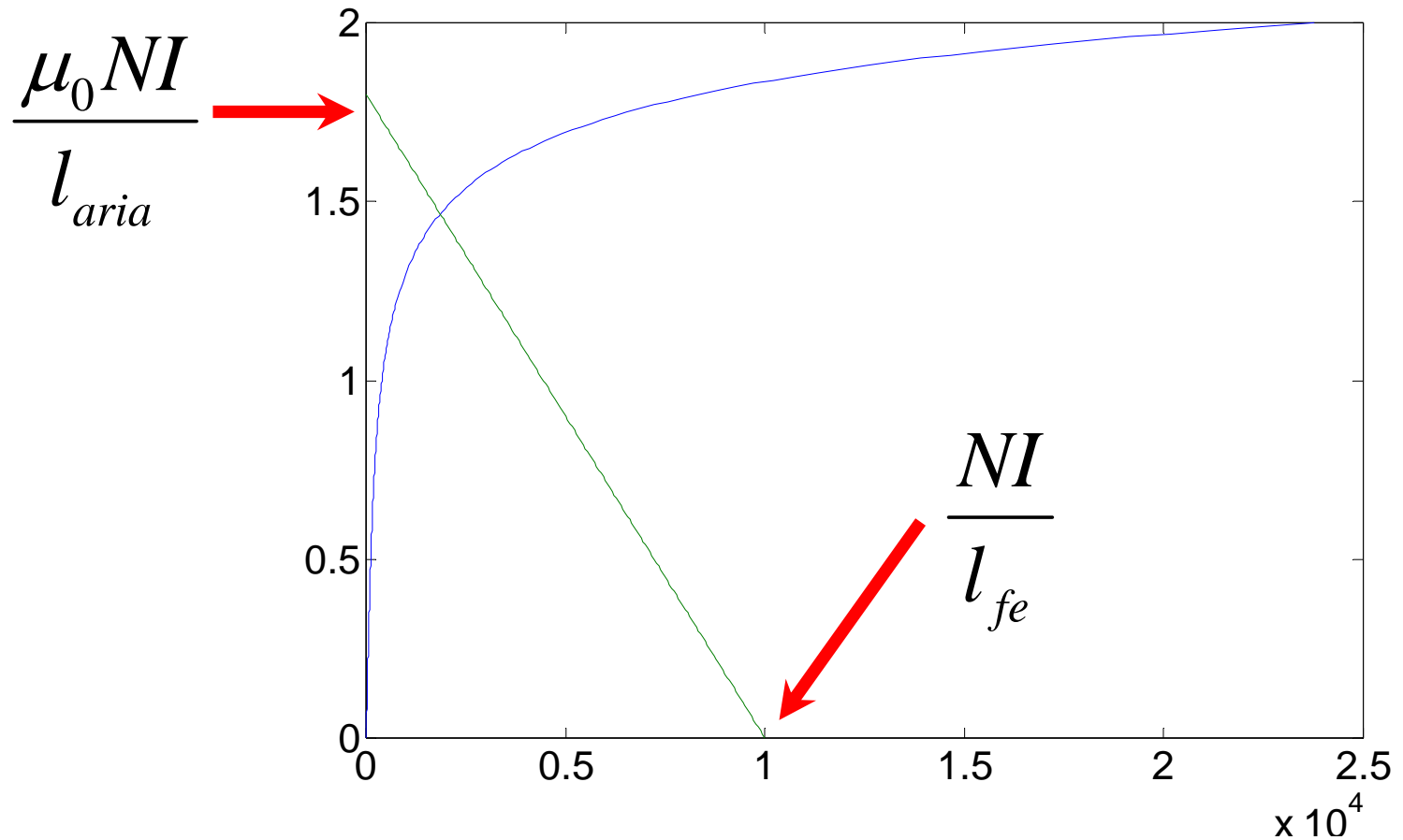
$$H_{fe} l_{fe} + H_{aria} l_{aria} = H_{fe} l_{fe} + \frac{B_{fe}}{\mu_0} l_{aria} = NI$$

$$B_{fe} = \frac{\mu_0 NI}{l_{aria}} - H_{fe} \frac{\mu_0 l_{fe}}{l_{aria}}$$

$$H_{fe} = \frac{NI}{l_{fe}} - B_{fe} \frac{l_{aria}}{\mu_0 l_{fe}}$$



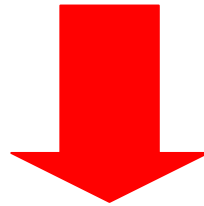
Analisi grafica (1/2)



Qual è l'equazione da risolvere?

$$H_{fe}(B_{fe}) = 129.5 \cdot B_{fe} + 76.1 \cdot B_{fe} \cdot e^{1.26 \cdot B_{fe}^2}$$

$$H_{fe} = \frac{NI}{l_{fe}} - B_{fe} \frac{l_{aria}}{\mu_0 l_{fe}}$$



$$\left(-\frac{NI}{l_{fe}} + B_{fe} \frac{l_{aria}}{\mu_0 l_{fe}} \right) + \left(129.5 \cdot B_{fe} + 76.1 \cdot B_{fe} \cdot e^{1.26 \cdot B_{fe}^2} \right) = 0$$



Quali metodi tratteremo?

- Ricerca Incrementale
- Bisezione
- False Position
- Metodo della secante
- Newton Raphson

